

Equilibres dans les graphes orientés

Semaine des Mathématiques

Conférence pour les professeurs de mathématiques

M. Morillon

4 avril 2018

Lettre de Pierre de Montmort à Nicolas Bernoulli (novembre 1713)

Un père veut donner les étrennes à son fils et lui dit : Je vais mettre dans ma main un nombre de jetons pair ou impair, comme je le jugerai à propos. Cela fait :

- ▶ si vous nommez pair et qu'il y a pair dans ma main, je vous donnerai 4 écus ;
- ▶ si vous nommez impair et qu'il y a pair dans ma main, vous n'aurez rien ;
- ▶ si vous nommez impair et qu'il y a impair dans ma main, vous aurez un écu ;
- ▶ si vous nommez pair et qu'il y a impair dans ma main, vous n'aurez rien.

Le jeu (à 2 joueurs et à somme nulle) sous forme normale

TABLE – La matrice de gain du “fils”

fils \ père	pair	impair
	pair	impair
pair	4	0
impair	0	1

Le jeu est à somme nulle : la fonction de gain du “père” est l'opposée de celle du “fils”.

Pierre Rémond de Montmort demande :

- ▶ Quelle règle faut-il prescrire au père pour qu'il économise son argent le mieux qu'il soit possible ?
- ▶ Quelle règle faut-il prescrire au fils pour qu'il prenne le meilleur parti ?
- ▶ Qu'on détermine quel avantage le père fait à son fils.

Pierre Rémond de Montmort jette l'éponge

"Je suis persuadé qu'il n'y a personne aussi capable que vous de surmonter de pareilles difficultés ; pour moi, outre que je crois que cela me passe, je vous avoue que je suis las de chercher, et que je suis disposé à goûter pendant quelque temps le doux plaisir de ne rien faire."

L'inégalité du minimax

Soient X et Y deux ensembles non vides et $m : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ la matrice de gain du joueur I dans un jeu à 2 joueurs I et II, où I joue ses options dans X et II joue dans Y .

I \ II				
	y_1	$\dots$	y_n	
x_1	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,n}$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
x_m	$a_{m,1}$	$\dots$	$a_{m,n}$	

-Si le joueur I joue x_i , il gagnera au moins $\inf_{y \in Y} m(x_i, y)$. Si la borne supérieure $v^- := \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} m(x, y)$ est atteinte en $\bar{x} \in X$, alors en jouant $\bar{x}$, I est assuré de gagner au moins v^- .

-La perte maximum de II est $v^+ := \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} m(x, y)$: si cette borne inférieure est atteinte en $\bar{y} \in Y$, alors en jouant $\bar{y}$, le joueur II est assuré de perdre au plus v^+ . De plus, on vérifie :

$$v^- = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} m(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} m(x, y) = v^+$$

Inégalité du “minimax” lorsque “sup” et “inf” sont atteints

Pour tous ensembles non vides X , Y et toute application $m : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} m(x, y) \leq \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} m(x, y)$$

Si le $\sup_{x \in X}$ à gauche est atteint en $\bar{x}$ et si le $\inf_{y \in Y}$ à droite est atteint en $\bar{y}$, alors l'inégalité du minimax s'écrit aussi :

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} m(x, y) \leq m(\bar{x}, \bar{y}) \leq \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} m(x, y)$$

Lorsque de plus X et Y sont finis, cette inégalité s'écrit encore :

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} m(x, y) \leq m(\bar{x}, \bar{y}) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} m(x, y)$$

Inégalité du minimax dans le jeu de Montmort

fils \ père	pair	impair
	pair	impair
pair	4	0
impair	0	1

Dans le jeu de Montmort, $X = Y = \{\text{"pair"}, \text{"impair"}\}$:

- ▶ $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} m(x, y) = 0$, et ce $\max_{x \in X}$ est atteint en tout $\bar{x} \in X$;
- ▶ $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} m(x, y) = 1$, et ce $\min_{y \in Y}$ est atteint en $\bar{y} = \text{"impair"}$;
- ▶ l'inégalité du minimax s'écrit $0 \leq m(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1$

Le jeu de Montmort en “stratégies mixtes”

Au lieu de choisir la stratégie “pair” ou la stratégie “impair”, le fils choisit une “*stratégie mixte*” du type “pair” avec probabilité p et “impair” avec la probabilité $1 - p$, où $p \in [0, 1]$. Le père procède de même avec les probabilités q et $1 - q$, où $q \in [0, 1]$.

fils \ père	pair (q)	impair ($1 - q$)
	pair (p)	impair ($1 - p$)
pair (p)	4	0
impair ($1 - p$)	0	1

Si le fils joue “pair” avec probabilité p et si le père joue “pair” avec probabilité q , alors l’espérance de gain du fils vaut :

$$G(p, q) = 4pq + 0p(1 - q) + 0(1 - p)q + 1 \cdot (1 - p)(1 - q) = 5pq - p - q + 1$$

Dans ce nouveau jeu “convexifié”, chaque joueur a donc maintenant une infinité “continue” d’options appartenant à $[0, 1]$.

Visualisation de la fonction de gain G sous sagemath

```
var('x y')
```

```
contour_plot(5*x*y-x-y+1,(x,0,1),(y,0,1),contours=3)
```

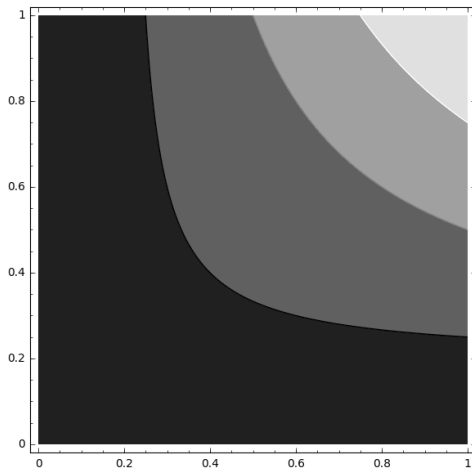


FIGURE – Les pixel clairs représentent les points en lesquels G est grande

Visualisation plus fine de G

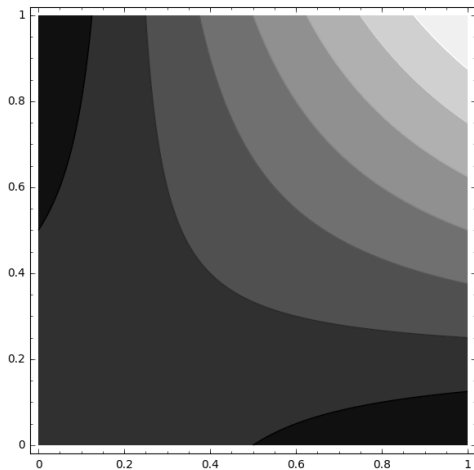
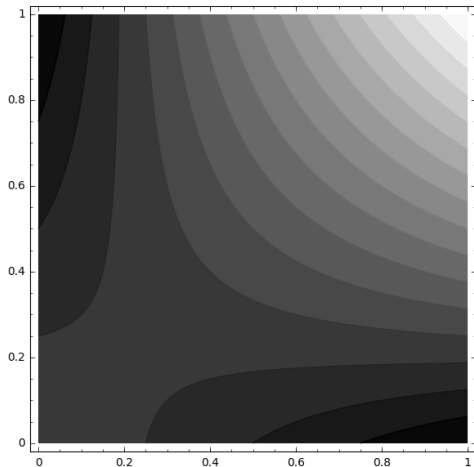
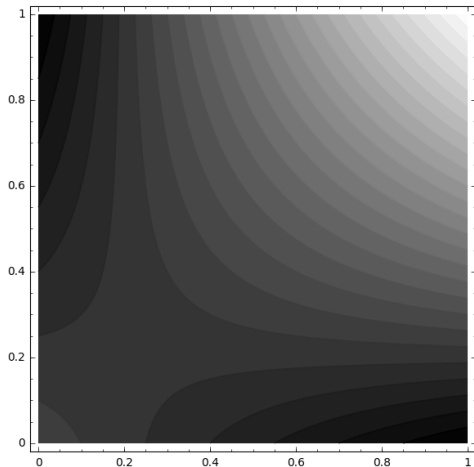


FIGURE – contours=7

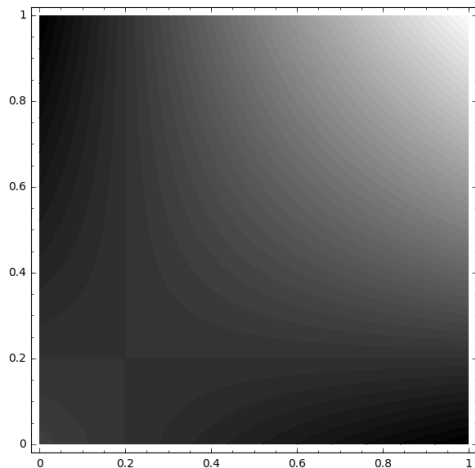
Visualisation de G avec contours=15



Visualisation de G avec contours=26



Visualisation de G avec contours=60



Point-selle

Dans le dessin précédent, le couple $(\bar{x} = 0.2, \bar{y} = 0.2)$ joue un rôle particulier : pour tous $x, y \in [0, 1]$, $G(x, \bar{y}) \leq G(\bar{x}, \bar{y}) \leq G(\bar{x}, y)$ (et on note que $G(0.2, 0.2) = 0.8$). Un tel couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est appelé *point-selle* ou *équilibre* de la fonction G . Il représente un “compromis” pour les deux joueurs.

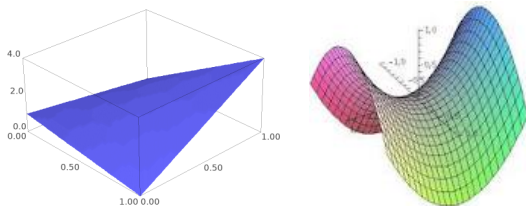


FIGURE – Le graphe de G (à gauche) et un “point-selle” (à droite)

Cournot, Borel, von Neumann, ...

- Cournot (1838) : *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (notion d'équilibre).
- Borel (1921) : *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique*.
- von Neumann (1928) : existence d'équilibres pour les jeux à 2 joueurs et à somme nulle.



FIGURE – Cournot, Borel et von Neumann

Théorème du “minimax” ; valeur d'un jeu

Soient X et Y deux ensembles finis non vides et $m : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ une matrice (X ensemble des lignes et Y ensemble des colonnes). Soit Δ_X (resp. Δ_Y) l'ensemble des stratégies mixtes de I (resp. II). Alors la fonction de gain G du jeu en stratégies mixtes associé à m vérifie l'égalité du minimax :

$$v^- = \sup_{x \in \Delta_X} \inf_{y \in \Delta_Y} G(x, y) = \inf_{y \in \Delta_Y} \sup_{x \in \Delta_X} G(x, y) = v^+$$

le nombre $v := v^+ = v^-$ est appelé la *valeur* du jeu convexifié G . Par compacité des sous-espaces Δ_X et Δ_Y , il existe $\bar{x} \in \Delta_X$ et $\bar{y} \in \Delta_Y$ tels que $v^- = \inf_{y \in \Delta_Y} G(\bar{x}, y)$ et $v^+ = \sup_{x \in \Delta_X} G(x, \bar{y})$. Il s'ensuit que pour tout $x \in \Delta_X$ et tout $y \in \Delta_Y$, $G(x, \bar{y}) \leq G(\bar{x}, \bar{y}) = v \leq G(\bar{x}, y)$. Tout tel couple $(\bar{x}, \bar{y})$ est appelé un *équilibre* du jeu convexifié G .

Remarque

L'équilibre $(\bar{x}, \bar{y})$ permet à I de gagner au moins la valeur v du jeu (quoi que joue II), et à II de perdre au plus v (quoi que joue I).

Le graphe orienté “Pierre - Ciseaux - Feuille”

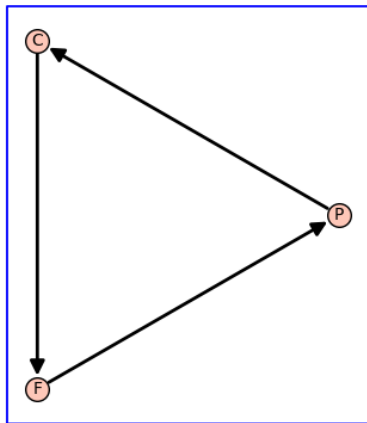


FIGURE – Le tournoi “Pierre - Ciseaux - Feuille”

- ▶ Deux joueurs choisissent simultanément un sommet du graphe orienté. Le joueur qui bat l'autre reçoit 1 euro de l'autre joueur. La matrice de ce jeu est donc :

$$M_3 =$$

$\begin{matrix} \text{I} \\ \backslash \\ \text{II} \end{matrix}$	P	C	F
P	0	1	-1
C	-1	0	1
F	1	-1	0

- ▶ Le jeu précédent est répété 10000 fois. Comment chacun pourrait-il jouer pour maximiser son gain ?

Équilibres d'un jeu anti-symétrique

Corollaire (du théorème du minimax)

Soit X un ensemble fini non vide et $m : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une matrice anti-symétrique. Alors la valeur du jeu convexifié associé est nulle, et les équilibres du type (E, E) du jeu sont ceux pour lesquels $m \times E \leq 0$ (où la stratégie E est vue comme un vecteur colonne).

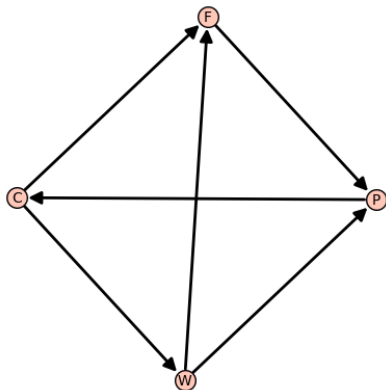
Exemple

Si $E = (p_1, p_2, p_3) \in \Delta_3$, alors (E, E) est un équilibre du jeu "Pierre-Ciseaux-Feuille" ssi le système suivant est satisfait :

$$\begin{cases} p_2 - p_3 \leq 0 \\ -p_1 + p_3 \leq 0 \\ p_1 - p_2 \leq 0 \end{cases}$$

ce qui signifie $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. L'équilibre du jeu "P-C-F" correspond à la probabilité uniforme.

“Pierre (P) - Ciseaux (C) - Feuille (F) - Puits (W)”



I \ II	P	C	F	W
P	0	1	-1	-1
C	-1	0	1	-1
F	1	-1	0	1
W	1	1	-1	0

Quels sont le(s) équilibre(s) de ce *tournoi*?

Module d'un graphe orienté

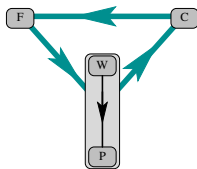
Un *module* d'un graphe orienté $(V, \rightarrow)$ (relation binaire irréflexive et anti-symétrique) est un sous-ensemble M de V dont tous les sommets sont vus de la même manière par chacun des éléments hors de M : pour tout $x \in V \setminus M$, pour tous $y, y' \in M$:

$$(x \rightarrow y \Leftrightarrow x \rightarrow y') \text{ et } (y \rightarrow x \Leftrightarrow y' \rightarrow x).$$


FIGURE – La paire $\{W, P\}$ est un “module” du tournoi.

Le tournoi “P-C-F-W” est obtenu à partir du tournoi “P-C-F” en y remplaçant le sommet P par le module $\{W, P\}$ où $W \rightarrow P$.

L'équilibre du tournoi "P-C-F-W"



Déduire du module $\{W, P\}$ l'équilibre du tournoi "P-C-F-W".

Unicité de l'équilibre d'un tournoi fini

Théorème (LLL,Fischer-Ryan)

Un tournoi fini (non vide) admet exactement un équilibre.

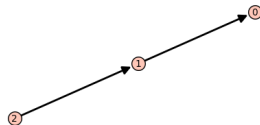
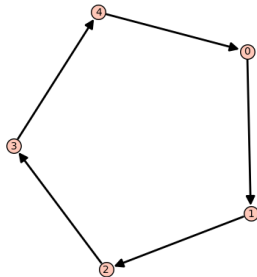
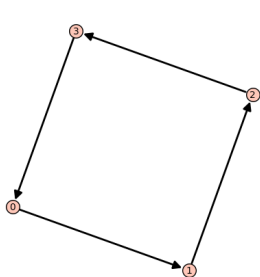
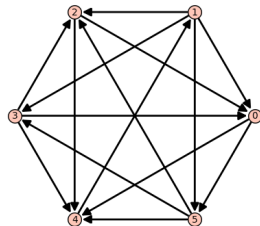
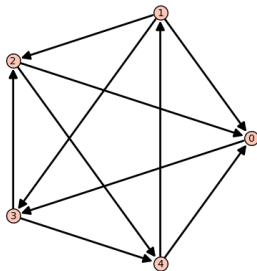
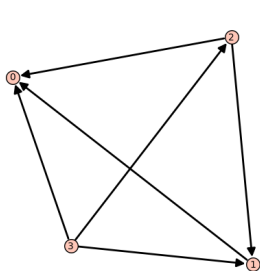
Pour une preuve, voir par exemple l'une des deux références suivantes :

-Fisher, David C. and Ryan, Jennifer, *Optimal strategies for a generalized "scissors, paper, and stone" game*, Amer. Math. Monthly, vol. 99, no 10, p. 935-42 (1992).

-Laffond, G. Laslier, J.-F. and Le Breton, M., *The bipartisan set of a tournament game*, Games and Economic Behavior, vol. 5, no 1, p. 182-201 (1993).

Conséquence. Etant donné un tournoi fini, on peut définir son *support* (nommé "ensemble bipartisan" par LLL) comme l'ensemble des sommets de poids strictement positifs relativement à l'équilibre du tournoi.

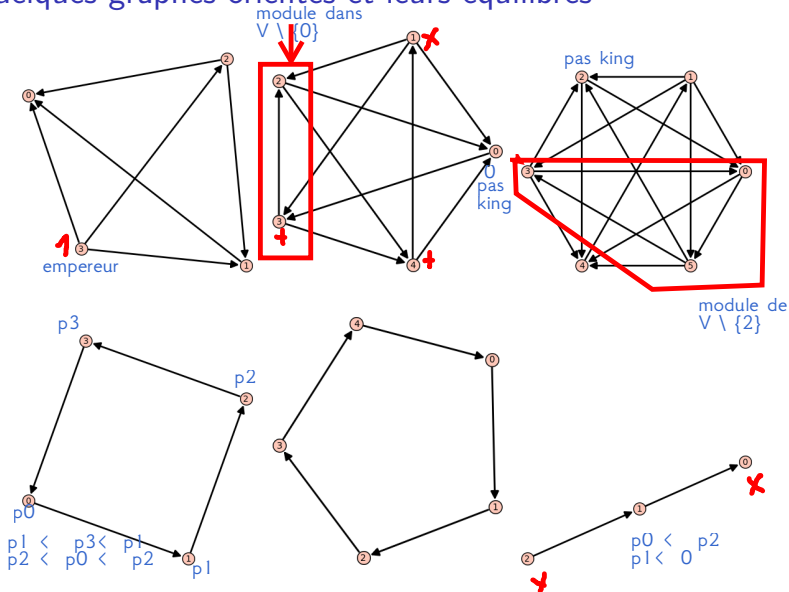
Quelques graphes orientés ...



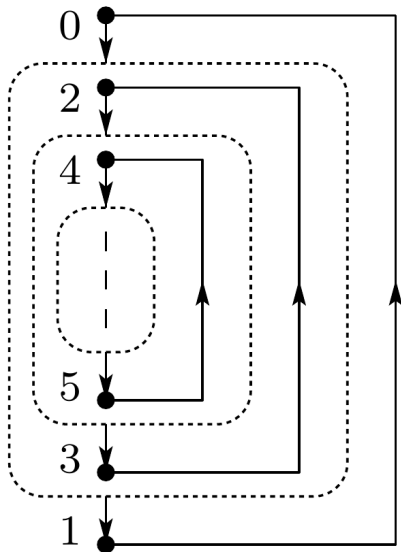
...et leurs équilibres

Tout sommet dans le support d'un équilibre est un "king" : si x bat k , k bat un y qui bat x)

Quelques graphes orientés et leurs équilibres



Un tournoi infini avec équilibre “complètement mixte”



Questions sur les tournois infinis

- En “itérant” le tournoi “P-C-F”, on peut trouver (voir page précédente) un tournoi infini avec un équilibre complètement mixte (*i.e.* dont tous les sommets sont de poids strictement positif).

Question

Peut-on trouver un tournoi infini avec équilibre complètement mixte mais sans module non trivial ?

- Il existe des tournois (infinis) sans équilibre, par exemple la chaîne sans plus grand élément $(\mathbb{N}, >)$.

Question

Un tournoi infini admet-il au plus un équilibre ?