

THÉORÈME DE STONE-WEIERSTRASS

CONTENTS

- | | |
|---|---|
| 1. Sous-algèbres fermées de $C_{\mathbb{R}}^*(X)$ | 1 |
| 2. Stone-Weierstrass réel | 1 |

1. SOUS-ALGÈBRES FERMÉES DE $C_{\mathbb{R}}^*(X)$

Proposition 1. *On considère la suite récurrente $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie :*

$$\begin{cases} P_0 = 0 \\ P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(x - P_n^2) \end{cases}$$

Alors $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction $\sqrt{\cdot} : x \mapsto \sqrt{x}$. Mieux (i.e. plus constructif) : pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2}{n+1}$.

Proof. On peut utiliser le théorème de Dini (valable dans **ZF**) ou, de manière plus constructive, établir par récurrence sur n que pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$. $\square$

Ainsi, si X est un espace topologique, si $M \in \mathbb{R}_+$ et si $f : X \rightarrow [0, M]$, alors la suite $(\sqrt{M}(P_n \circ \frac{f}{M}))_n$ converge uniformément vers $\sqrt{f}$. En particulier :

Corollary 1. *Soit X un espace topologique. Toute sous-algèbre fermée de $C_{\mathbb{R}}^*(X)$ (algèbre des applications continues bornées de X dans $\mathbb{R}$) est stable sous les fonctions $\sqrt{\cdot}$, $|\cdot|$ et sous les opérations $\vee$ et $\wedge$.*

Proof. $\square$

2. STONE-WEIERSTRASS RÉEL

Etant donné un ensemble X , une partie A de $\mathbb{R}^X$ est *séparatrice* lorsque pour tous éléments x, y distincts de X , il existe $u \in A$ tel que $u(x) \neq u(y)$. Si A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$, séparateur et contenant la fonction constante 1_X , alors pour tous éléments x, y distincts de X , et tous réels α, β , il existe $u \in A$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(y) = \beta$.

Theorem 1. *Soit K un espace topologique compact (i.e. quasicompact et séparé). Toute sous-algèbre unitaire et séparatrice de $C_{\mathbb{R}}(K)$ (algèbre des applications continues de K dans $\mathbb{R}$ munie de la norme uniforme) est dense dans $C_{\mathbb{R}}(K)$.*

Date: januar 21, 2004; april 3, 2008.

This paper is named mar/ens/04/lic/topo/stone-w.tex.

Proof. Soit A l'adhérence dans $C_{\mathbb{R}}(K)$ d'une telle algèbre. On va montrer que A est dense dans $C_{\mathbb{R}}(K)$ (donc égale à $C_{\mathbb{R}}(K)$). Soit $f \in C_{\mathbb{R}}(K)$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout élément $x \in K$, notons A_x le sous-ensemble $\{u \in A : u(x) = f(x)\}$. Pour tous éléments $x, y \in K$, on note $A_{x,y}$ l'ensemble $A_x \cap A_y$. La preuve "usuelle" semble utiliser l'axiome du choix car on commence par "choisir" pour chaque couple $(x, y) \in K^2$, une fonction arbitraire $u_{x,y} \in A_{x,y}$. Mais on peut éviter le recours à **AC** en considérant *toutes* les fonctions $u \in A_{x,y}$ (au lieu d'en choisir une).

Etape 1 : Pour tout $z \in K$, il existe $g \in A_z$ tel que $f - \varepsilon \leq g$. Soit $z \in K$. On considère le recouvrement ouvert suivant du compact K :

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K, u \in A_{y,z}} \{x \in K : f(x) - \varepsilon < u(x)\}$$

De ce recouvrement ouvert, on extrait un sous-recouvrement fini : il existe donc une partie finie F de K , et pour chaque $y \in F$, une partie finie G_y de $A_{y,z}$ telles que :

$$K \subseteq \bigcup_{y \in F} \bigcup_{u \in G_y} \{x \in K : f(x) - \varepsilon < u(x)\}$$

Alors la fonction $g := \sup_{y \in F, u \in G_y} u$ appartient à A (car la sous-algèbre fermée A est close par "sup fini") et $g \in A_z$. De plus, si $x \in K$, soit $y \in F$ et $u \in A_{y,z}$ tels que $f(x) - \varepsilon < u(x)$. Alors $g(x) \geq u(x) > f(x) - \varepsilon$.

Etape 2 : il existe $g \in A$ tel que $f - \varepsilon \leq g \leq f + \varepsilon$. On considère maintenant le recouvrement ouvert suivant de K :

$$K \subseteq \bigcup_{u \in A, f - \varepsilon \leq u} \{x \in K : u(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

On en extrait un sous-recouvrement fini : soit F une partie finie de $\{u \in A : f - \varepsilon \leq u\}$ telle que

$$K \subseteq \bigcup_{u \in F} \{x \in K : u(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

Alors la fonction $g := \inf_F$ appartient à A et $f - \varepsilon \leq g$. De plus, si $x \in K$, soit $u \in F$ tel que $u(x) < f(x) + \varepsilon$. Alors $g(x) \leq u(x) < f(x) + \varepsilon$. $\square$