

Décompositions paradoxales d'un F_2 -ensemble libre et axiomes de Choix

Marianne Morillon
Workshop LIM/LIRIS

14-16 Février 2023

Le paradoxe de Hausdorff-Banach-Tarski

On peut partitionner une boule en un nombre fini de morceaux, et déplacer ces morceaux en sorte de constituer deux boules disjointes de même rayon que la boule initiale.

Les preuves utilisent l'*Axiome du Choix* (**AC**).

Nombre de morceaux: 9 (von Neumann, 1927), 8 (Sierpinski, 1945), ... puis 5 (valeur optimale, Robinson, 1947). Voir le livre de Tomkowicz et Wagon p.76.

-Pawlikowski (1991, Fund. Math.): 7 morceaux avec l'axiome de *Hahn-Banach* (**HB**), plus faible que **AC**.

-Sato et Shioya (2022, PAMS): 6 morceaux avec **HB**.

Je propose: 5 morceaux, avec **HB** + une conséquence de l'axiome du choix dans les paires **AC**². (idée)

Le groupe libre F_2 sur deux générateurs a et b

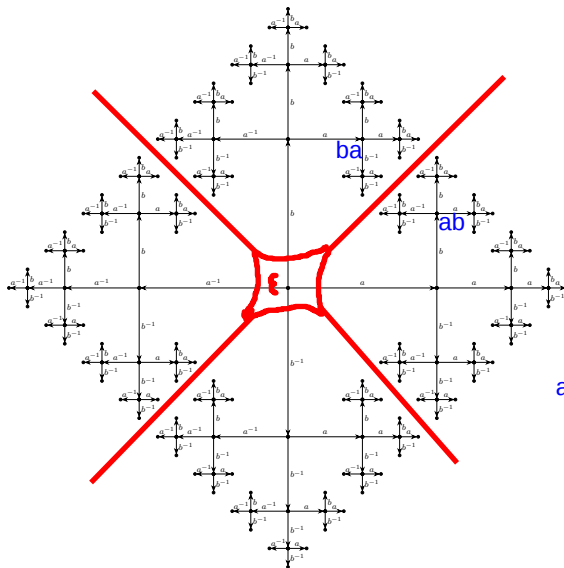
On considère l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$, réduits pour les 4 règles $a.a^{-} \rightarrow \varepsilon$, $b.b^{-} \rightarrow \varepsilon$, $a^{-}.a \rightarrow \varepsilon$, $b^{-}.b \rightarrow \varepsilon$.

Cet ensemble est muni de la loi $.$ consistant à concaténer puis réduire. On obtient un groupe appelé *groupe libre* sur l'alphabet $\{a, b\}$.

Exemple

Si $w_1 = bab$ et $w_2 = b^{-}a^{-}bb$ alors $w_1.w_2 = bbb$.

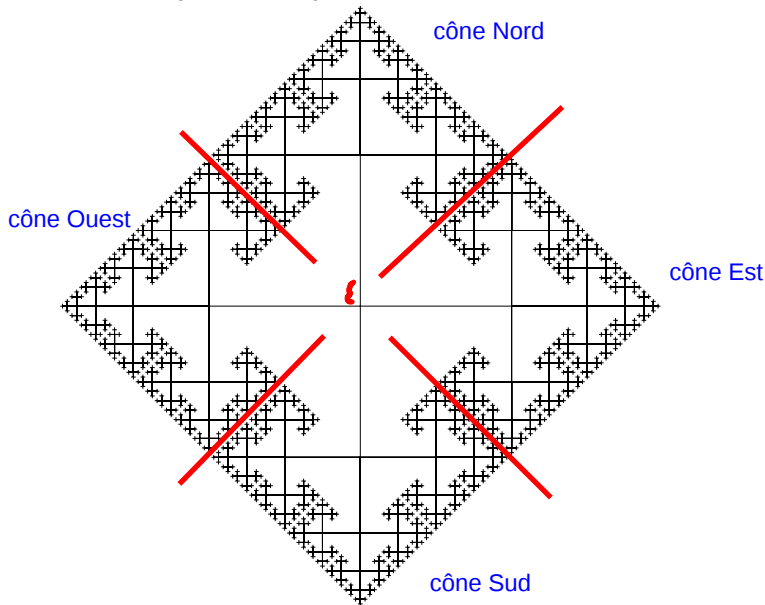
Le graphe de Cayley du groupe F_2 (sur l'ens. gén. $\{a, b\}$)



<https://tex.stackexchange.com/questions/222881/cayley-graph-of-free-group-in-tikz>

Sommets: éléments de F_2 ; arcs: couples $(w, w \cdot l)$ où $l \in \{a, b\}$
 arbre 4-régulier, à arcs étiquetés (par a, b, a^{-1}, b^{-1})

Une décomposition paradoxale usuelle de F_2



$$F_2 = \boxed{C_N \sqcup C_S} \sqcup \boxed{C_E \sqcup C_W} \sqcup \{\varepsilon\} = N^-.C_N \sqcup C_S = E^-.C_E \sqcup C_W$$

Décomposition (m, n) -paradoxale d'un groupe

Soit $(G, *, e)$ un groupe. Une *décomposition (m, n) paradoxale* de G est une partition $G = (A_1 \cup \dots \cup A_m) \cup (B_1 \cup \dots \cup B_n)$ de G en $m + n$ morceaux pour laquelle il existe $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in G$ tels que $G = \bigcup_{1 \leq i \leq m} a_i \cdot A_i$ et $G = \bigcup_{1 \leq i \leq n} b_i \cdot B_i$.

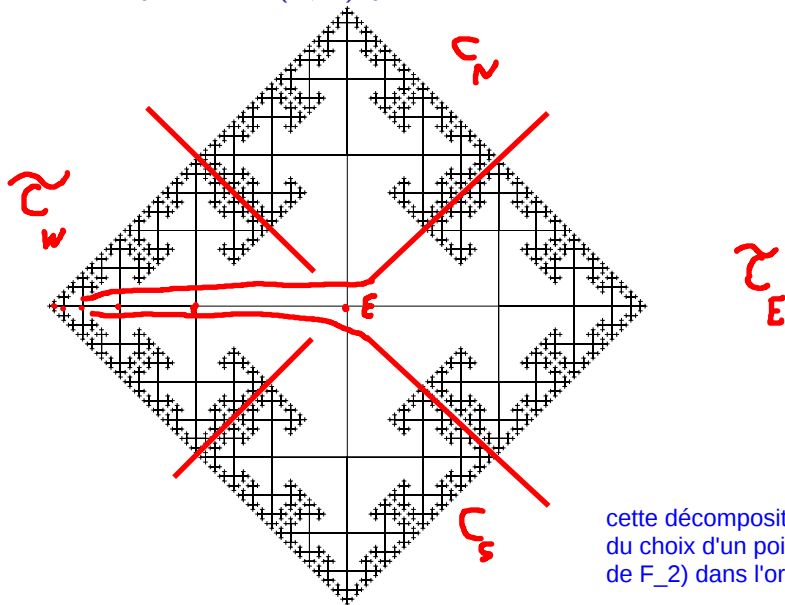
La décomposition précédente n'est pas tout-à-fait $(3, 2)$ -paradoxale (à cause de $\{\varepsilon\}$).

On transforme C_E et C_W en $\widetilde{C}_E$ et $\widetilde{C}_W$ comme suit:

-on considère le "rayon" $\rho := \{\varepsilon, E^-, E^{-2}, E^{-3}, \dots\}$

-on définit $\widetilde{C}_E = C_E \cup \rho$ et $\widetilde{C}_W = C_W \setminus \rho$.

La décomposition (2, 2)-paradoxe usuelle de F_2



cette décomposition dépend
du choix d'un point (origine
de F_2) dans l'orbite

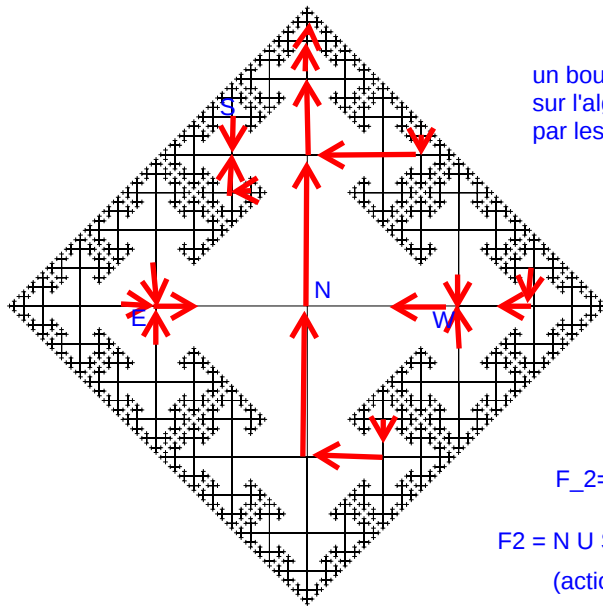
$$F_2 = \boxed{C_N \sqcup C_S} \sqcup \boxed{\widetilde{C}_E \sqcup \widetilde{C}_W} = N^- . C_N \sqcup C_S = E^- . \widetilde{C}_E \sqcup \widetilde{C}_W$$

Déc. $(2, 2)$ -paradoxale de F_2 à l'aide d'un "bout"

On considère un "rayon" du graphe de Cayley: par exemple le rayon $[\varepsilon, N, N^2, N^3, \dots)$. On oriente les arcs dans la direction du "bout" défini par ce rayon. Chaque sommet, de degré sortant 1 et de degré entrant 3, se retrouve étiqueté par la lettre N ou S ou E ou W selon son cap.

On n'a pas besoin du rayon lui-même, mais seulement du "bout" (classe d'équivalence de rayons) associé.

Déc. (2,2)-paradoxale de F_2 à l'aide d'un "bout": dessin



un bout correspond à un ultrafiltre
sur l'algèbre de Boole engendrée
par les cônes

$$F_2 = \boxed{N \ U \ S} \ U \ \boxed{E \ U \ W}$$

$$F_2 = N \ U \ S.s = E \ U \ W.w$$

(action notée à droite)

Déc. (2,2)-paradoxale de la sphère privée d'un ens. dén

Il existe deux rotations vectorielles de $\mathbb{R}^3$ engendrant un sous-groupe de $SO(3)$ isomorphe à F_2 (par exemple les rotations de Sato.)

On fait agir librement le groupe F_2 (dénombrable) sur $S \setminus D$ où D est l'ensemble des points fixes des rotations et où S est la sphère de $\mathbb{R}^3$: l'ensemble $S \setminus D$ est réunion disjointe de sous-ensembles (orbites) du type précédent. Et $S = D \sqcup$ "forêt 4-régulière" avec sommets étiquetés N, S, E, W

Dans chaque orbite, tous les points sont indistinguables (l'origine ε a été perdue).

Avec **HB**, je peux choisir dans chaque orbite un "bout" (super) ou un sous-arbre 2-régulier (c'est-à-dire 2 "bouts"). Avec **AC**² je choisis l'un des deux bouts de chaque sous-arbre 2-régulier, d'où une décomposition (2,2)-paradoxale de $S \setminus D$ en 4 morceaux.