

Compacité faible et Axiome du Choix
Séminaire ERMIT

Marianne Morillon

12 et 19 février 2007

Questions

Etant donné un espace normé E , on note par défaut $\|\cdot\|$ sa norme, B_E sa boule unité large: $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

Compacité de la boule unité large?

La boule B_E est-elle:

- ▶ compacte pour la topologie de la norme?
- ▶ compacte pour une topologie moins fine “agréable”?
- ▶ quasi-compacte pour une topologie moins fine “agréable”?

Diverses réponses possibles

Quelles réponses dans **ZFC**? dans **ZF**? (ou autres théories ...)

Cas où E est un Banach uniformément convexe.

Cadre ensembliste

On se place dans **ZF**.

Définition de la topologie faible

Etant donné un espace normé E , on note E' son **dual continu**.

Topologie faible sur E

C'est la moins fine des topologies sur E , rendant continues les applications $f \in E'$. On la note $\sigma(E, E')$.

Description des ouverts faibles

- ▶ **demi-espace strict**: toute partie de E du type $(f < \lambda)$, où $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ▶ **polyèdre strict**: toute intersection finie de demi-espaces stricts.
- ▶ **ouvert faible**: union de polyèdres stricts.

Comparaison top. faible/top. norme

En dimension finie, topologies faible et forte coïncident.

En dimension infinie:

- ▶ un polyèdre strict non vide n'est pas borné (inclut une variété affine de codimension finie)
- ▶ un ouvert faible non vide n'est pas borné
- ▶ l'adhérence faible de la sphère unité inclut la boule large correspondante
- ▶ top. faible $\subsetneq$ top. forte

Produits de compacts

“Boolean Prime ideal” axiom (*alias* **BPI**)

Toute algèbre de Boole non nulle admet un idéal premier.

Théorème (“folklore”)

Les énoncés suivants sont équivalents:

- ▶ **BPI**
- ▶ Tout filtre sur un ensemble est inclus dans un ultrafiltre.
- ▶ Tychonov: Tout produit de compacts (séparés) est compact.
- ▶ pour tout ensemble I , $[0, 1]^I$ est compact.
- ▶ pour tout ensemble I , $\{0, 1\}^I$ est compact.
- ▶ Alaoglu.
- ▶ ...

Statut de **BPI**

Théorème

- ▶ **AC** $\rightarrow$ **BPI**
- ▶ **BPI** $\nrightarrow$ **AC**

Proof.

Le résultat **BPI** $\nrightarrow$ **AC** est dû à Halpern et Levy(67), [4].



Forme analytique de “Hahn-Banach”

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Forme sous-linéaire sur E :

Toute application $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- ▶ $\forall x, y \in E \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (sous-additivité)
- ▶ $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad p(\lambda \cdot x) = \lambda p(x)$ (homogénéité positive)

Axiome HB

“Si $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme sous-linéaire, si F est un sev de E , si $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire majorée par p , alors il existe une forme linéaire $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, prolongeant f et majorée par p ”.

Statut de **HB**

Théorème

- ▶ **BPI** $\rightarrow$ **HB**
- ▶ **HB** $\nrightarrow$ **BPI**
- ▶ **ZF** $\nVdash$ **HB**.

Proof.

HB $\nrightarrow$ **BPI**: voir Pincus(72b), [7]. Pour **ZF** $\nVdash$ **HB**: voir Pincus(72c), [8].



Equivalents de **HB**

Théorème

Chacun des énoncés suivants équivaut à **HB**:

- ▶ Le dual continu d'un espace normé non nul est non nul.
- ▶ Tout convexe fermé d'un espace normé est faiblement fermé.
- ▶ La topologie faible sur un espace normé est séparée.
- ▶ Toute algèbre de Boole non nulle admet une mesure finiment additive non nulle à valeurs dans $[0, 1]$.
- ▶ Sur un *evn* de dimension infinie, la topologie faible n'est pas grossière.
- ▶ ...

Une alternative à la topologie faible

Topologie convexe sur un espace normé

C'est la topologie la moins fine pour laquelle les convexes fortement fermés sont fermés.

Treillis convexe d'un espace normé E

C'est le treillis T_E engendré par les convexes fortement fermés. Les éléments de T_E sont les unions finies de convexes fortement fermés. Les fermés de la topologie convexe sont les intersections d'éléments de T_E .

Comparaison

Soit E est un espace normé de dimension infinie.

- ▶ “top. faible $\subseteq$ top. convexe $\subsetneq$ top. forte” (voir appendice pour l'inclusion stricte).
- ▶ Dans **ZF+HB**, “top. faible = top. convexe”.

Axiome du choix dépendant et consorts

Axiome **DC**

Si R est une relation binaire sur un ensemble non vide E , et si pour tout $x \in E$ il existe $y \in E$ satisfaisant xRy , alors il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n R x_{n+1}$.

Axiome **AC**($\mathbb{N}$)

Toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles non vides a un produit non vide.

Axiome **AC**($\mathbb{N}$, **fin**)

Toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles *finis* non vides a un produit non vide.

Statut des axiomes **DC** et **Cie**

Théorème

AC $\rightarrow$ (**BPI**+**DC**) $\rightarrow$ **DC** $\rightarrow$ **AC**($\mathbb{N}$) $\rightarrow$ **AC**($\mathbb{N}$, **fin**), et réciproques fausses. De plus **ZF** $\not\models$ **AC**($\mathbb{N}$, **fin**).

Proof.

(**BPI**+**DC**) $\not\models$ **AC**: voir Pincus(77b), [9]. **AC**($\mathbb{N}$) $\not\models$ **DC**:

Jensen(67)? voir aussi le livre de Jech(73b), [5].

AC($\mathbb{N}$, **fin**) $\not\models$ **AC**($\mathbb{N}$): voir par exemple le “1er modèle de Cohen” du livre de Jech. **ZF** $\not\models$ **AC**($\mathbb{N}$, **fin**): Voir le “2ième modèle de Cohen” du même livre. □

Espaces métriques complets

On suppose que X est un espace métrique.

Filtres de Cauchy

Un filtre $\mathcal{F}$ d'un treillis T de parties de X est dit *de Cauchy* lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $F \in \mathcal{F}$ dont le diamètre soit $< \varepsilon$.

Espace complet

L'espace métrique est dit *complet* lorsque tout filtre de Cauchy de son treillis de fermés a une intersection non vide.

Diverses notions de complétude

Soit X un espace métrique.

Proposition

Considérons les prop. suivantes:

1. L'espace métrique X est complet.
2. Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés de X dont les diamètres tendent vers 0, alors $\bigcap_n F_n$ est non vide.
3. Toute suite de Cauchy de X converge.

Alors $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$. Et **AC**($\mathbb{N}$) implique les réciproques.

Uniforme convexité d'un evn E

Stricte convexité de E

Tout segment inclus dans la sphère unité est un singleton.

Autrement dit, pour tous $x, y \in S_E$, $x \neq y \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

Uniforme convexité de E

Version quantitative forte de la stricte convexité. Pour tout réel

$\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in B_E$,

$\|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.

Exemples

Tout Hilbert est u-convexe. Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout ens. I , l'espace $\ell^p(I)$ est u-convexe. Si $\mathcal{B}$ est une alg. de Boole et $\nu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ fin. additive, alors $L^p(\nu)$ est u-convexe. Si A est une alg. de Gelfand, et si $f \in A'$ est positive, alors $L^p(A, f)$ est u-convexe.

Thm. principal

versions “light” d’Alaoglu: **AUc**, **AH** et **AH_b**

- ▶ **AUc**: La boule unité large d’un Banach uniformément convexe est compacte pour la topologie convexe.
- ▶ **AH**: (Hilbert) La boule unité large d’un Hilbert est faiblement compacte.
- ▶ **AH_b**: (Hilbert à base hilbertienne) Pour tout ens. I , la boule unité large de $\ell^2(I)$ est faiblement compacte.

Bien sûr, **AUc** $\Rightarrow$ **AH** $\Rightarrow$ **AH_b**.

Théorème

AC($\mathbb{N}$) $\Rightarrow$ **AUc**.

Proof.

Voir la suite.



Preuve: préliminaires

Soit T un treillis de parties d'un ensemble X , $\mathcal{F}$ un filtre de T .

Ensembles $\mathcal{F}$ -stationnaires

Si $S \in T$, S est $\mathcal{F}$ -stationnaire lorsqu'il rencontre tout élément de $\mathcal{F}$. On note $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ l'ensemble des éléments $\mathcal{F}$ -stationnaires.

Enrichissement d'un filtre $\mathcal{F}$ de T

- ▶ Si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{F})$, et si $\mathcal{A}$ est une chaîne, alors $\mathcal{A} \cup \mathcal{F}$ engendre un filtre.
- ▶ Soient $F_1, \dots, F_m \in T$. Si $F_1 \cup \dots \cup F_m \in \mathcal{S}(\mathcal{F})$, alors l'un des F_i est $\mathcal{F}$ -stationnaire.

Critère de quasi-compacité

Soit X un espace top., et T un treillis de fermés de X . Si tout fermé de X est intersection d'éléments de T et si tout filtre de T a une intersection non vide, alors X est quasi-compact.

Preuve: suite

Preuve du th.

Soit T le treillis convexe de E . Soit $\mathcal{F}$ un filtre de T , contenant la boule unité large de E . Il s'agit de montrer que $\cap \mathcal{F}$ est non vide. Soit $R := \inf\{r \in \mathbb{R}_+ : B(0, r) \in \mathcal{S}(\mathcal{F})\}$. L'ensemble $\mathcal{F} \cup \{B(0, r) : r > R\}$ engendre un filtre $\mathcal{G}$ de T . Si $R = 0$, alors $0 \in \cap \mathcal{F}$. Si $R > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des éléments du filtre $\mathcal{G}$ inclus dans la couronne $D(0, R - \varepsilon, R + \varepsilon)$. Par **AC**($\mathbb{N}$), on choisit pour tout $n \in \mathbb{N}$, un ensemble fini F_n de convexes fermés de E dont la réunion appartient à $\mathcal{G}$ et est incluse dans la couronne $D(0, R - \frac{1}{n+1}, R + \frac{1}{n+1})$. Par **AC**($\mathbb{N}$, **fin**), l'ensemble $\cup_n F_n$ est dénombrable. On peut donc définir (par récurrence) une suite $(C_n)_n \in \prod_{n \in \mathbb{N}} F_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{G} \cup \{C_i : i < n\}$ engendre un filtre $\mathcal{G}_n$ et $C_n \in \mathcal{S}(\mathcal{G}_n)$. Par uniforme convexité de E , le filtre $\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{G}_n$ est de Cauchy. Par complétude de E , il admet pour intersection un singleton $\{a\}$. Alors $a \in \cap \mathcal{G} \subseteq \cap \mathcal{F}$.

Cas Hilbertien

Résumé

$$\mathbf{DC} \rightarrow \mathbf{AC}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbf{AUc} \rightarrow \mathbf{AH} \rightarrow \mathbf{AH}_b \rightarrow \mathbf{AC}(\mathbb{N}, \mathbf{fin})$$

Proof.

La dernière implication se trouve dans Fossy/Morillon(98), [2].

L'implication $\mathbf{DC} \rightarrow \mathbf{AUc}$ avait été prouvée dans Del/Morillon(99), [1], laissant ouvertes les questions $\mathbf{AC}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbf{AUc}$? et

$\mathbf{AC}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbf{AH}$? Une preuve de $\mathbf{AC}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbf{AH}$ figure dans Fremlin(06), [3], chap. 56, Section 566P. □

Question: réciproques?

Les implications suivantes sont-elles prouvables: $\mathbf{AH} \rightarrow \mathbf{AUc}$?,
 $\mathbf{AH}_b \rightarrow \mathbf{AH}$?, $\mathbf{AC}(\mathbb{N}, \mathbf{fin}) \rightarrow \mathbf{AH}_b$?

Borsuk-Ulam

Borsuk-Ulam(1933)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit S la sphère unité associée. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue. Alors il existe $u \in S$ tel que $f(u) = f(-u)$.

Proof.

Voir une preuve par exemple dans [6].



Lusternik-Schnirelmann

Lusternik-Schnirelmann(1930)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit S la sphère unité correspondante. Si S est incluse dans la réunion de n fermés, l'un de ces fermés contient deux points antipodaux.

Proof.

On suppose $n \geq 2$. Soient $F_1, \dots, F_n$ ces n fermés. Soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ l'application associant à tout $x \in S$ le $(n-1)$ -uplet $(d(x, F_1), \dots, d(x, F_{n-1}))$. Soit par Borsuk-Ulam un point $u \in S$ tel que $f(u) = f(-u)$. Si l'une au moins des coordonnées u_{i_0} de u est nulle, alors u et $-u$ appartiennent tous deux à F_{i_0} ; sinon, u et $-u$ n'appartiennent pas à $\cup_{1 \leq i < n} F_i$, donc u et $-u$ appartiennent tous deux à F_n . □

antipodies

a -antipodie

Etant donné un espace normé E , et un point $a \in E$ de norme < 1 , appelons **a -antipodie** l'application de S dans lui-même, qui à tout $x \in S$ associe le point $x' \in S$ tel que $(ax) \cap S = [x, x']$.

- La a -antipodie est une involution continue de S .
- On peut généraliser les énoncés de Borsuk-Ulam et Lusternik-Schnirelmann avec des a -antipodies (au lieu de 0-antipodies).

Adhérence de la sphère pour la top. convexe

Adhérence de la sphère

Soit E un espace normé qui n'est pas de dimension finie. Alors, l'adhérence de la sphère unité pour la topologie convexe est la boule unité large correspondante.

Proof.

L'adhérence de cette sphère S vis-à-vis de la top. convexe est incluse dans la boule unité large correspondante. Réciproquement, soit $a \in E$ tel que $\|a\| < 1$. Soit un ensemble fini $\{C_i : 1 \leq i \leq n\}$ de convexes fermés de E tel que le fermé de base (pour la top. convexe) $F := \cup_{1 \leq i \leq n} C_i$ inclut S . Il s'agit de voir que $a \in F$. Considérons un sev V de E , contenant a , de dimension $\geq n$. Le Corollaire de Lust.-Schnir. montre que l'un des fermés $C_i \cap V$ contient deux points a -antipodaux de S , et donc aussi a par convexité de C_i . □

Théorème de Riesz

Soit E un espace normé.

Version “recouvrements”

Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. L'espace E est de dimension finie
2. La boule B_E est compacte (pour la topologie de la norme)

Version “séquentielle”

Les conditions suivantes sont équivalentes:

1. L'espace E ne contient pas de suite infinie libre
2. La boule B_E est séquentiellement compacte (pour la topologie de la norme)

Références citées

1. Dehommé and Morillon, Dependent choices and weak compactness., Notre Dame J. Formal Logic, 1999.
2. Fossy and Morillon, The Baire category property and some notions of compactness, J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 1998.
3. Fremlin, D., Measure Theory, volume 5, <http://www.essex.ac.uk/maths/staff/fremlin/mt.htm>, 2006.
4. Halpern, J. D. and Lévy, A., The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. , (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIII, Part I, Univ. California, Los Angeles, Calif., 1967),
5. Jech, The Axiom of Choice, NHPC, 1973.

Références citées: suite

6. Matousek, Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Lecture Notes, 2002.
7. Pincus, David, Independence of the prime ideal theorem from the Hahn-Banach theorem, Bull. Amer. Math. Soc., 1972.
8. Pincus, David, The strength of the Hahn-Banach theorem, Victoria Symposium on Nonstandard Analysis (Univ. Victoria, Victoria, B.C.), 1972.
9. Pincus, David, Adding dependent choice to the prime ideal theorem, Logic Colloquium 76 (Oxford, 1976).