

THÉORIE DES GRAPHES

JACQUES
LABELLE


MODULO

Sociologie, chimie, génétique des populations, circuits électriques, réseaux de transport, etc., tous ces domaines sont des champs d'application de la théorie des graphes. L'utilité de celle-ci s'avère fructueuse particulièrement par le développement d'une méthode de pensée simplificatrice, qui ramène les problèmes les plus divers à l'étude de sommets et d'arêtes.

Le présent traité, une introduction à la théorie des graphes, tente un juste dosage de chacun des aspects suivants de cette théorie: les "algorithmes" (le chemin minimum, de Ford-Fulkerson, etc.), la "récréation mathématique" (jeux et énigmes) et la "théorie proprement dite" (planarité, théorème des cinq couleurs, graphes eulériens et hamiltoniens, etc.).

De la part du lecteur, cette étude ne requiert, au préalable, qu'une connaissance minimale de la théorie des ensembles (voir Appendice) et un brin d'imagination. De niveau du premier cycle universitaire, cet ouvrage réunit, avec les exercices, les éléments d'un premier cours dans cette discipline. De plus, grâce à la présence des solutions présentées en détail, le lecteur autodidacte l'étudiera avec facilité.



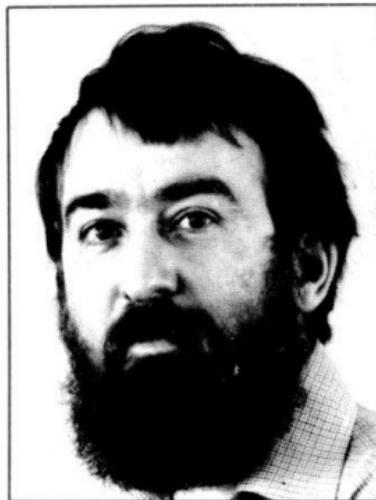
Jacques Labelle a complété son B.Sc. (1968) et sa maîtrise (1969) à l'Université de Montréal; il a obtenu son Ph. D. (en topologie algébrique) du Massachusetts Institute of Technology (Boston) en 1975. Depuis juin 1977, l'auteur enseigne à l'Université du Québec à Montréal où il fait partie du groupe de recherche en combinatoire. Le professeur Labelle a publié et participé à la rédaction de nombreux articles sur la combinatoire et la théorie des graphes. Maître aux échecs et ex-président de la Fédération Québécoise des Échecs, l'auteur, qui possède une collection de plus de neuf cents livres d'échecs, se sert, ici et là dans le texte, des exemples provenant du noble jeu.

ISBN-2-89 113-200-9

Sociologie. chimie, génétique des populations. circuit* électriques. réseaux de transport, etc., tous ces domaines sont des champs d'application de la théorie des graphes. L'utilité de celle-ci s'avère fructueuse particulièrement par le développement d'une méthode de pensée simplificatrice. qui ramène les problèmes les plus divers à l'étude de sommets et d'arêtes.

Le présent traité. une introduction à la théorie des graphes, tente un juste dosage de chacun des aspects suivants de cette théorie: les "algorithmes" (du chemin minimum. de Ford-Fulkerson. etc.). la "récréation mathématique" (jeux et énigmes) et la "théorie proprement dite" (planarité, théorème des cinq couleurs, graphes eulériens et hamiltoniens, etc.)

De la part du lecteur, cette étude ne requiert, au préalable. qu'une connaissance minimale de la théorie des ensembles (voir Appendice) et un brin d'imagination. De niveau du premier cycle universitaire, cet ouvrage réunit, avec les exercices. les éléments d'un premier cours dans cette discipline. De plus. grâce à la présence des solutions présentées en détail, le lecteur autodidacte l'étudiera avec facilité.



Jacques Labelle a complété son **B.Sc** (1966) et sa **maîtrise** (1969) à l'**Université** de Montréal; il a obtenu son Ph. D. (en topologie **algébrique**) du **Massachusetts Institute of Technology** (Boston) en 1975. Depuis **juin 1977**, l'**auteur** enseigne à l'**Université du Québec à Montréal** où il fait partie du groupe de recherche en combinatoire. Le professeur Labelle a **publié** et **participé à la rédaction** de nombreux **articles sur la combinatoire et la théorie des graphes**. **Maître aux échecs** et **ex-président** de la **Fédération Québécoise des Echecs**. l'**auteur**, qui possède "ne collection de **plus** de neuf cents livres **d'échecs**, se sert. ici et là dans le texte, des exemples provenant **du** noble je".

THEORIE DES GRAPHES

JACQUES
LABELLE



La publication de cet ouvrage a été rendue possible grâce à la participation financière du ministère de l'Enseignement supérieur et de la Science.

révision du texte: Isabelle Lecomte
conception graphique: Guy Lafrenière
dactylographie: Carole Deslandes

THÉORIE DES GRAPHS

Tous droits réservés © 1981 par

Modulo Éditeur

233, av. Dunbar, bureau 300

Mont-Royal (Québec)

H3P 2H4

(514) 738-9818

Dépôt légal: 3^e trimestre 1981
Bibliothèque nationale du Québec
Bibliothèque nationale du Canada

Imprimé au Canada
4 5 IG 90

ISBN 2-89113-200-9

TABLE DES MATIÈRES

0 INTRODUCTION	v
1 GRAPHES SIMPLES	1
1 définitions et exemples	1
2 boucles et arêtes multiples	13
3 chaînes, cycles; connexité	14
4 graphes eulériens et hamiltoniens	17
5 autres définitions	24
6 énigmes	29
7 arbres	33
2 GRAPHES ORIENTÉS	43
1 graphes orientés et fonctions multivoques	43
2 graphes simples et graphes orientés	45
3 terminologie des graphes orientés	46
4 matrices d'adjacence	49
5 distance	53
6 nombres associés à un graphe orienté	56
3 GRAPHES VALUÉS	67
1 définition, chemin minimum	67
2 méthode de Maria Hasse	68
3 algorithmes de Dijkstra	70
4 arbres partiels de coût minimum	73
5 réseaux	76
6 couplage	82
4 PLANARITÉ	87
1 graphes planaires	87
2 formule d'Euler	93
3 polyèdres réguliers	96
4 théorème des cinq couleurs	98
5 JEUX	103
1 jeu sur un graphe orienté	103
2 fonctions de Grundy	106
3 application au jeu de Nim	108
A APPENDICE notations et définitions sur les ensembles	115
B SOLUTIONS AUX EXERCICES	119
C EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES	159
D BIBLIOGRAPHIE	175
E INDEX	179

100

100



INTRODUCTION

De même que la topologie, la théorie des probabilités et une grande partie de l'analyse, la théorie des graphes doit son origine aux travaux d'Euler à la fin du XVIII^e siècle. On en étudia d'abord certains problèmes, tels que les ponts de Königsberg, la marche du cavalier et la conjecture des quatre couleurs. Pendant des siècles, à plusieurs reprises, divers auteurs en découvrent, en publient, puis en redécouvrent de nouveau les résultats. Depuis le début du XX^e siècle, la théorie des graphes (de même que la combinatoire) s'est constituée en une branche des mathématiques, étudiée systématiquement. Ceci est dû principalement aux travaux de pionniers tels que König, Kùratowski, Menger et Cayley, et, plus récemment, Berge, Erdős et Harary.

La théorie des graphes revendique de nombreuses applications en chimie, sociologie, génétique des populations, circuits électriques, réseaux de transport, théorie de la communication, mais son utilité s'avère fructueuse particulièrement par le développement d'une méthode de pensée simplificatrice qui ramène les problèmes les plus divers à l'étude de sommets et d'arêtes (ou de sommets et de flèches).

Le présent ouvrage, une introduction à la théorie des graphes, en étudie les aspects suivants: algorithmique, de récréation mathématique, classique.

Au premier chapitre, le lecteur trouvera d'abord les définitions fondamentales concernant les graphes simples, ainsi que des résultats sur la connexité, les graphes eulériens et les graphes hamiltoniens. Suivent

Les notions classiques de géodésique, point d'articulation, séparateur, facteur linéaire, ainsi que des résultats récents sur les graphes dits *fortement hamiltoniens* (obtenus conjointement avec le professeur Anton Kotzig du Centre de recherche en mathématiques appliquées de l'Université de Montréal).. La section 6 est consacrée à la résolution de certaines énigmes. La théorie des graphes ne résout pas systématiquement toutes ces énigmes, mais en donne une approche rationnelle et efficace. La section 7, traitant des arbres, contient une nouvelle preuve de la formule de Cayley, due à André Joyal (Université du Québec à Montréal) et basée sur sa récente *théorie des espèces de structures* en combinatoire (Voir [19] dans la bibliographie, page 176) .

Au chapitre **2**, les graphes simples deviennent orientés (c.-à-d. que les arêtes sont remplacées par des flèches) et de nombreuses définitions sont reprises dans ce contexte. Les différentes méthodes pour calculer la distance entre deux sommets d'un graphe orienté sont ensuite considérées. L'étude de nombres associés à un graphe orienté constitue la dernière section de ce chapitre. Elle emprunte de nombreux exemples au jeu d'échecs.

Au chapitre **3**, les graphes orientés deviennent valués (en d'autres mots, chaque flèche est maintenant munie d'une valeur). C'est à ce moment que les problèmes les plus pratiques font leur apparition: celui du chemin minimum, celui du flot maximum dans un réseau, celui de l'arbre partiel de valeur minimum dans un graphe simple. Plusieurs algorithmes résolvent ces différents problèmes.

Au chapitre **4**, qui traite de la planarité, les considérations redeviennent plus théoriques. L'étude des graphes planaires et la formule classique d'Euler sont d'abord présentées. Dans la section 3, on retrouve les polyèdres réguliers, connus depuis les Grecs anciens. La section 4 est consacrée à la preuve classique de Heawood du théorème des cinq couleurs.

Une rapide introduction à la théorie des jeux est entreprise au chapitre **5**. On y apprend à jouer sur un graphe orienté. De nombreux jeux sont résolus à l'aide de la notion de fonction de Grundy.

Tout au long du texte, le lecteur trouvera de nombreux exercices (exactement 157), susceptibles de l'aider à mieux assimiler les définitions, à appliquer les théorèmes et algorithmes, et à exercer son aptitude à la recherche. Un ou deux astérisques indiquent les exercices jugés plus difficiles par l'auteur. Tous ces exercices ont une solution

détaillée dans la section B (solutions aux exercices).

Le lecteur ne devrait consulter celle-ci qu'en désespoir de cause ou pour comparer sa solution à celle de l'auteur.

Le malheureux lecteur pour qui la théorie des ensembles ne fait pas partie du bagage héréditaire trouvera dans l'Appendice (page 115), les principales notations et définitions utilisées dans le texte. La section C contient 100 exercices supplémentaires non-solutionnés.

Je tiens à remercier de leurs suggestions, les étudiants de l'Université du Québec à Montréal, auxquels j'ai donné le cours Mat. 3160 (théorie des graphes), ainsi que Rachel Leblanc et Christiane Laliberté, du secrétariat du Département de mathématiques, de l'excellent travail de dactylographie du manuscrit original.

Je remercie le professeur Anton Kotzig (Université de Montréal), de m'avoir initié à la théorie des graphes et de la générosité avec laquelle il partage ses nombreuses idées mathématiques.

Je remercie également les membres de l'équipe de recherche en combinatoire de l'U.Q.A.M., André Joyal, Pierre Leroux et Gilbert Labelle, de leur encouragement, surtout de leur enthousiasme contagieux pour la combinatoire et, plus particulièrement Pierre Leroux et Gilbert Labelle, des suggestions de corrections et d'ajouts, après lecture du manuscrit.

Je remercie enfin le professeur Claude Levesque de l'Université Laval d'avoir pris la peine de me signaler quelques dernières coquilles.

GRAPHES SIMPLES

1 définitions et exemples

Soit X un ensemble fini. Nous désignons par $|X|$ la *cardinalité* de X , c.-à-d. le nombre d'éléments de X . De plus $\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X , et, pour $0 \leq k \leq |X|$, $\mathcal{P}_k(X)$ désigne l'ensemble des parties de X ayant k éléments, c.-à-d. $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ et $\mathcal{P}_k(X) = \{Y \mid Y \subseteq X \text{ et } |Y| = k\}$. Si $|X| = n$, il est bien connu que $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$ et $|\mathcal{P}_k(X)| = \binom{n}{k} = C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Dans ce cas, on a évidemment $\mathcal{P}_0(X) = \{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}_n(X) = \{X\}$. Les éléments de $\mathcal{P}_1(X)$ sont appelés des *boucles* (ou *singltons*) et les éléments de $\mathcal{P}_2(X)$, des *arêtes* (ou *paires*).

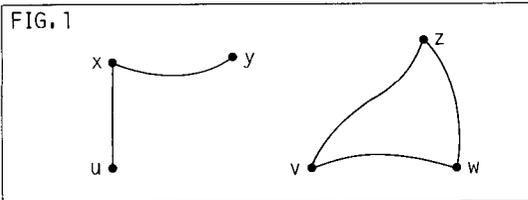
DEFINITION Un *graphe simple* G est formé de deux ensembles: un ensemble fini non-vidé X , appelé l'*ensemble des sommets* de G , et un ensemble A de paires de sommets, appelé l'*ensemble des arêtes* de G . On a donc $A \subseteq \mathcal{P}_2(X)$. On écrit souvent $G = (X, A) = (X(G), A(G))$.

Lorsque $a = \{x, y\} \in A$, on dit que a est l'*arête* de G d'*extrémités* x et y ; ou que a *joint* x et y ; ou que a *passé par* x et y . Les sommets x et y sont alors *adjacents* dans G et on dit qu'ils sont *incidentés* à l'arête a .

Le nombre de sommets $|X|$ du graphe simple $G = (X, A)$ s'appelle l'*ordre* de G . On le dénote $|G|$ ou $\text{ord}G$.

2 GRAPHES SIMPLES

On *représente* habituellement le graphe simple G par une figure dans le plan. Les sommets de G sont représentés par des points du plan et ses arêtes par des traits entre ces sommets. Par exemple, le graphe simple $G = (X,A)$ où $X = \{x,y,z,u,v,w\}$ et $A = \{\{x,y\}, \{x,u\}, \{z,v\}, \{w,z\}, \{w,v\}\}$ peut se représenter par la figure 1.



REMARQUE Dans la figure planaire représentant G , tout ce qui importe est de savoir lesquels des points sont des sommets et lesquels de ces sommets sont reliés par une arête, c.-à-d. la position des sommets et la façon de tracer les arêtes n'importent pas.

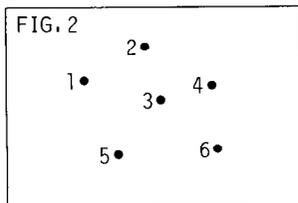
Voyons maintenant de nombreux exemples de graphes simples.

EXEMPLE 1 Le *graphe d'un tournoi*, $T = (X,A)$ où
 $X = \{\text{participants au tournoi}\}$
 $A = \{\text{paires de joueurs se rencontrant dans le tournoi}\}.$

EXEMPLE 2 La *carte routière* du Québec, Q , où
 $X = \{\text{villes du Québec}\}$
 $A = \{\{v,w\} \mid \text{il y a au moins une route directe reliant les villes } v \text{ et } w\}.$

EXEMPLE 3 Le *graphe discret* d'ordre n , D_n , où
 $X = \{1,2,\dots,n\}$ et $A = \emptyset.$

Représentation de D_6 :

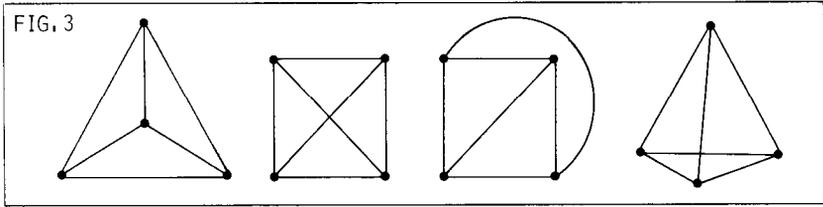


Plus généralement, le graphe discret sur X est le graphe simple $D_X = (X,\emptyset).$

EXEMPLE 4 Le *graphe complet* d'ordre n , K_n , où

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ et $A = \mathcal{P}_2(X)$.

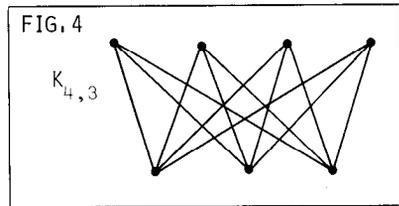
Représentations de K_4 :



Plus généralement, le graphe complet sur X est le graphe simple $K_X = (X, \mathcal{P}_2(X))$.

EXEMPLE 5 Le graphe *biparti-complet*, $K_{p,q}$, d'indices $p \geq 1$ et $q \geq 1$, où

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q\}$
 et $A = \{\{x_i, y_j\} \mid 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq q\}$.



EXEMPLE 6 Le graphe C_8 du *mouvement du cavalier* au jeu d'échecs où $X = \{64 \text{ cases d'un échiquier}\}$ et

$A = \{\{c_1, c_2\} \mid \text{un cavalier sur } c_1 \text{ peut, en un coup, aller en } c_2\}$.

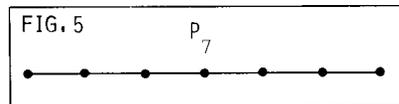
De même pour le mouvement de la dame, du roi, du fou et de la tour, on obtient les graphes simples D_8, R_8, F_8 et T_8 . Plus généralement, on obtient les graphes simples C_n, D_n, R_n, F_n et T_n , des mouvements des pièces du jeu d'échecs sur un échiquier n par n .

EXEMPLE 7 Pour $n \geq 1$, la *chaîne*,

P_n , où

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ et

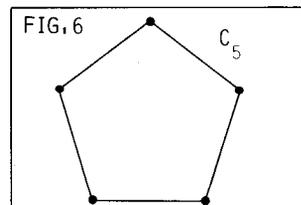
$A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}$.



EXEMPLE 8 Pour $n \geq 3$, le *cycle*, C_n , où

$X = \{1, 2, \dots, n\}$ et

$A = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\} \cup \{\{1, n\}\}$.

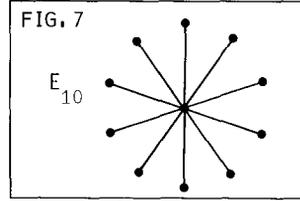


EXEMPLE 9 Pour $n \geq 1$, l'*étoile*, E_n , où

4 GRAPHES SIMPLES

$X = \{0, 1, \dots, n\}$ et

$A = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots, \{0, n\}\}.$

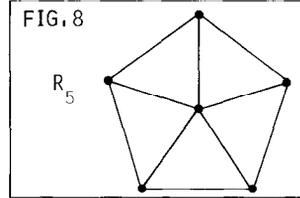


EXEMPLE 10 Pour $n \geq 3$, la *roue*, R_n , où

$X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et

$A = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}, \dots, \{0, n\}\} \cup$

$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$



EXEMPLE 11 Le graphe de *Petersen généralisé*, $P(n, k)$, $n \geq 3$,

$1 \leq k < n$, est défini par $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$

et $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ où

$A_1 = \{\{x_i, x_{i+1}\} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{x_n, x_1\}\}$

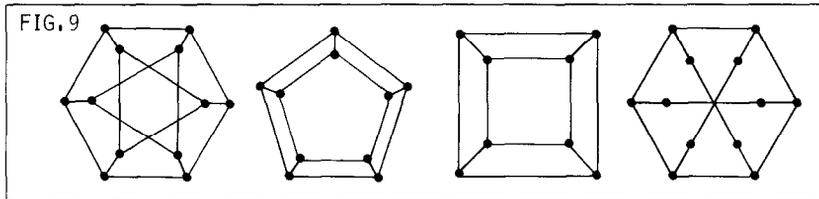
$A_2 = \{\{x_i, y_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ et

$A_3 = \{\{y_i, y_{i+k}\} \mid 1 \leq i \leq n-k\} \cup \{\{y_i, y_{i+k-n}\} \mid n-k+1 \leq i \leq n\}.$

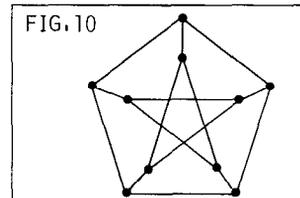
En d'autres mots, les arêtes sont les $\{x_i, x_{i+1}\}$, $\{x_i, y_i\}$ et $\{y_i, y_{i+k}\}$ où $1 \leq i \leq n$ et où les indices sont pris modulo n .

Les sommets x_i sont dits *extérieurs* et les sommets y_i *intérieurs*.

Notez que $P(n, k)$ est d'ordre $2n$. Voici, pour fixer les idées, la représentation géométrique la plus naturelle pour les graphes $P(6, 2)$, $P(5, 4)$, $P(4, 1)$ et $P(6, 3)$.

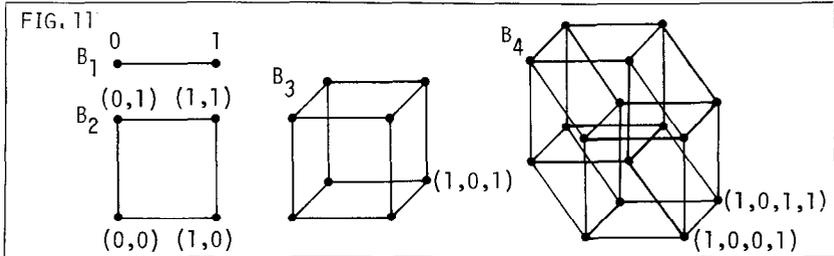


Le graphe $P(5, 2)$ est appelé le *graphe de Petersen* (fig. 10).



EXEMPLE 12 Pour $n \geq 1$, définissons le *cube de dimension n*, B_n , où $X = \{0,1\}^n = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) \mid \forall i, \epsilon_i = 0 \text{ ou } \epsilon_i = 1\}$ et

$A = \{(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n), (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)\} \mid \epsilon_i = \delta_i \text{ sauf pour un indice}\}$.



Passons maintenant à quelques définitions.

DEFINITION Soit $G = (X,A)$ un graphe simple et $x \in X$ un sommet. Le *degré* de x , dénoté $d(x)$, est le nombre d'arêtes de G incidentes à x , soit $d(x) = |\{a \in A \mid x \in a\}| = |\{y \in X \mid \{x,y\} \in A\}|$. Lorsque $d(x) = 0$, on dit que le sommet x est *isolé*.

EXEMPLE 1 Dans D_n , tous les sommets sont isolés.

EXEMPLE 2 Dans K_n , $\forall x, d(x) = n - 1$.

EXEMPLE 3 Dans le graphe d'un tournoi, $d(x)$ est le nombre d'adversaires du joueur x .

EXEMPLE 4 Dans $K_{p,q}$, $1 \leq i \leq p, d(x_i) = q$ et $1 \leq j \leq q, d(y_j) = p$.

DEFINITION Un graphe simple G est dit *régulier de degré r*, si $\forall x \in X, d(x) = r$. Un graphe simple régulier de degré 3 est dit *cubique*.

EXEMPLE 1 D_n est régulier de degré 0.

EXEMPLE 2 K_n est régulier de degré $n - 1$.

EXEMPLE 3 $K_{n,n}$ est régulier de degré n .

EXEMPLE 4 Le graphe du mouvement de la tour, T_8 , est régulier de degré 14.

6 GRAPHES SIMPLES

EXEMPLE 5 Le cube de dimension n , B_n , est régulier de degré n .

Voici un premier résultat, très utile, en particulier pour compter le nombre d'arêtes dans un graphe simple.

LEMME (des poignées de mains) Soit $G = (X, A)$ un graphe simple, alors

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2 \cdot |A|.$$

Preuve: Dans la somme de gauche, chaque arête, puisqu'elle a deux extrémités, est comptée exactement deux fois.

DEFINITION $x \in X$ est dit *pair* si $d(x)$ est un entier pair;
 $x \in X$ est dit *impair* si $d(x)$ est un entier impair.

COROLLAIRE Dans un graphe simple quelconque, le nombre de sommets impairs est toujours un entier pair.

Preuve: Soit P et I l'ensemble des sommets pairs et impairs respectivement. Bien sûr, $P \cup I = X$ et $P \cap I = \emptyset$.

On a $2 \cdot |A| = \sum_{x \in X} d(x) = \sum_{x \in P} d(x) + \sum_{x \in I} d(x)$. Or, $x \in P \Leftrightarrow d(x)$ est pair.

Les entiers $2 \cdot |A|$ et $\sum_{x \in P} d(x)$ sont donc pairs. Il en est de même de leur différence, $\sum_{x \in I} d(x)$. On en déduit que $|I|$ est pair puisqu'une somme d'entiers impairs est paire si et seulement si il y en a un nombre pair.

COROLLAIRE Si G est un graphe régulier de degré r , alors $|A| = \frac{1}{2} r \cdot |X|$

PROPOSITION Soit $G = (X, A)$ un graphe simple tel que $|X| > 1$, alors il existe $x, y \in X$ tels que $x \neq y$ et $d(x) = d(y)$.

Preuve: Soit $n = |G|$. Si tous les sommets sont de degrés différents, alors, puisque $\forall x, 0 \leq d(x) \leq n-1$, G contient un et un seul sommet, disons x_i , de degré i , pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Mais $n-1 > 0 \Rightarrow x_{n-1}$ existe et $d(x_{n-1}) = n-1 \Rightarrow x_{n-1}$ est adjacent à tous les sommets de $G \Rightarrow \forall i, d(x_i) > 0$.

Contradiction car $d(x_0) = 0$.

DEFINITION Soit deux graphes simples $G = (X, A)$ et $G' = (X', A')$; un *homomorphisme* de G à G' est une fonction $\psi: X \rightarrow X'$ telle que $\forall x \in X, \forall y \in X, \{x, y\} \in A \Rightarrow \{\psi(x), \psi(y)\} \in A'$.

DEFINITION Si l'homomorphisme ψ est une fonction bijective telle que $\psi^{-1}: X' \rightarrow X$ soit également un homomorphisme de graphes simples, alors ψ est appelé un *isomorphisme* de G à G' . En d'autres mots, un isomorphisme $: G \rightarrow G'$ est une bijection $\psi: X \rightarrow X'$ telle que $\{x, y\} \in A \Leftrightarrow \{\psi(x), \psi(y)\} \in A'$. Bien sûr, la fonction $\bar{\psi}$ définie par $\bar{\psi}(\{x, y\}) = \{\psi(x), \psi(y)\}$ est alors une bijection de A sur A' . Lorsqu'un isomorphisme de G à G' existe, on dit que G et G' sont *isomorphes* et on écrit $G \cong G'$.

Par exemple, il est facile de voir que les graphes simples E_n et $K_{1,n}$, définis précédemment, sont isomorphes. Il suffit, par exemple, de considérer la bijection $\psi: \{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{x_1, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ définie par $\psi(0) = x_1$ et pour $1 \leq j \leq n, \psi(j) = y_j$.

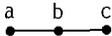
PROPOSITION Soit $\psi: G \rightarrow G'$ un isomorphisme de $G = (X, A)$ à $G' = (X', A')$, alors $|X| = |X'|, |A| = |A'|$ et $\forall x \in X, d(x) = d(\psi(x))$.

Preuve: On sait que $\psi: X \rightarrow X'$ induit une bijection $\bar{\psi}: A \rightarrow A'$. De plus, $\forall x \in X, \bar{\psi}$ applique bijectivement $\{\{x, y\} \in A\}$ sur $\{\{\psi(x), \psi(y)\} \in A'\}$.

Or, $d(x) = |\{\{x, y\} \in A\}|$ et $d(\psi(x)) = |\{\{\psi(x), z\} \in A'\}| = |\{\{\psi(x), \psi(y)\} \in A'\}| = |\{\{x, y\} \in A\}|$.

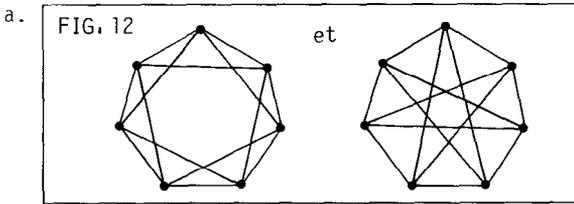
REMARQUE La réciproque est fautive en général, c.-à-d. on peut trouver deux graphes simples $G = (X, A)$ et $G' = (X', A')$ non-isomorphes et une bijection $\psi: X \rightarrow X'$ telle que $\forall x \in X, d(x) = d(\psi(x))$. Voir par exemple les exercices 8c, 8d et 12.

EXERCICES

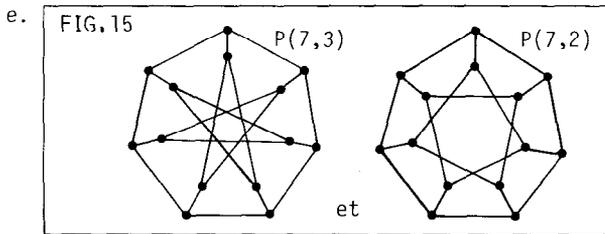
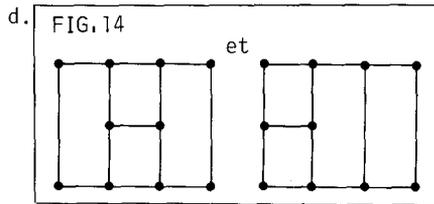
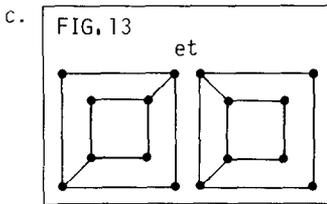
- Combien y a-t-il d'arêtes dans les graphes simples C_8, D_8, R_8, F_8 et T_8 , des mouvements des pièces aux échecs?
- Prouver que dans une réunion mondaine il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.
- Ecrire tous les homomorphismes du graphe simple  à C_3 .

8 GRAPHES SIMPLES

4. Combien y a-t-il d'isomorphismes de E_n sur $K_{1,n}$?
5. Soit $G = (X,A)$ un graphe simple; montrer qu'il y a $2 \cdot |A|$ homomorphismes de K_2 à G .
6. Combien y a-t-il d'homomorphismes de C_n à K_2 ? de D_n à K_m ? de K_m à D_n ?
7. En comptant de deux façons les arêtes de K_{n+1} , établir la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
8. Les graphes simples suivants sont-ils isomorphes?

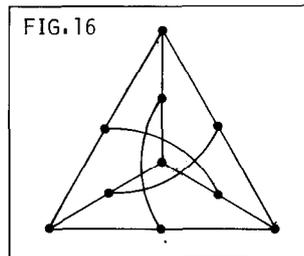


b. Le cube B_3 et $P(4,1)$.



9. Dessiner tous les graphes simples dont l'ensemble des sommets est $\{1,2,\dots,n\}$ pour $n = 1, 2, 3$ et 4 . Parmi ces graphes, lesquels sont isomorphes?
10. Combien le cube de dimension n , B_n , admet-il de sommets et d'arêtes?

11. Une suite décroissante d'entiers naturels est dite *graphique* s'il existe un graphe simple dont les degrés des sommets sont ces entiers. Parmi les suites suivantes, lesquelles sont graphiques?
- a. 3, 3, 2, 1, 1 b. 3, 3, 1, 1
 c. 3, 3, 2, 2 d. 4, 2, 1, 1, 1, 1
 e. 5, 3, 2, 1, 1, 1 f. 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1
12. Trouver deux graphes non-isomorphes d'ordre 5 ayant 3, 2, 2, 2, 1 comme suite des degrés.
13. A une réunion mondaine, il y a m personnes qui sont membres de diverses associations. Sachant que:
- a. il y a n associations, comprenant chacune 3 membres;
 b. deux associations quelconques ont toujours exactement un membre en commun;
 c. chaque personne est membre d'exactly 2 associations;
- trouver les valeurs de n et de m .
- *14. Soit $n \geq 3$ et $1 \leq k < n$.
- a. Montrer que les graphes de Petersen généralisés $P(n,k)$ et $P(n,n-k)$ sont égaux.
 b. Pour $n \neq 2k$, montrer que $P(n,k)$ est cubique.
 c. Si $1 \leq r < n$ et $1 \leq s < n$ sont tels que $rs \equiv \pm 1 \pmod{n}$, montrer que $P(n,r)$ et $P(n,s)$ sont isomorphes.
15. Montrer que le graphe de Petersen est isomorphe au graphe simple suivant:



DEFINITION On dit que $H = (Y,B)$ est un *sous-graphe* de $G = (X,A)$ si $Y \subseteq X$ et $B \subseteq A$, c.-à-d. si l'inclusion de Y dans X est un homomorphisme de H dans G .

DEFINITION Soit $G = (X,A)$ un graphe simple et $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Le sous-graphe de G engendré par Y , dénoté G_Y , est défini par

$G_Y = (Y, \emptyset_2(Y) \cap A)$. En particulier pour $x \in X$ et $|G| > 1$, le sous-graphe $G - x$ est défini par $G - x = G_Y$ où $Y = X - \{x\}$.

DEFINITION On dit que $H = (Y, B)$ est un *graphe partiel* de $G = (X, A)$ si $X = Y$ et $B \subseteq A$, c.-à-d. si l'identité de X est un homomorphisme de H dans G . Pour obtenir un graphe partiel de G , on doit donc prendre tous les sommets de G et on peut supprimer quelques arêtes de G .

DEFINITION Soit $G = (X, A)$ un graphe simple et $B \subseteq A$. Le graphe partiel de G engendré par B est défini par $G_B = (X, B)$. En particulier, pour $a \in A$, on définit le graphe partiel $G - a$ par $G - a = (X, A - \{a\})$.

EXEMPLE 1 Dans Q (le graphe simple des routes du Québec), le graphe simple des routes de la Gaspésie forme un sous-graphe et le graphe simple des routes à quatre voies en est un graphe partiel.

EXEMPLE 2 $K_{p,q}$ est un sous-graphe de $K_{p+r,q+s}$.

EXEMPLE 3 K_n admet D_n comme graphe partiel.

EXEMPLE 4 R_8, F_8 et T_8 sont des graphes partiels de D_8 .

EXEMPLE 5 D_n est un sous-graphe de K_m si $m \geq n$.

DEFINITION Etant donné deux graphes simples $G = (X, A)$ et $G' = (X', A')$, la *réunion* de ces graphes est le graphe simple $G \cup G' = (X \cup X', A \cup A')$.

Par exemple, on a $R_n = E_n \cup C_n$ et $D_8 = T_8 \cup F_8$.

DEFINITION Etant donné deux graphes simples $G = (X, A)$ et $G' = (X', A')$ où $X \cap X' = \emptyset$, le *joint* $G \vee G'$, de ces graphes simples, est défini par $G \vee G' = (X \cup X', A'')$ où $A'' = A \cup A' \cup \{\{x, x'\} | x \in X \text{ et } x' \in X'\}$.

Par exemple, pour $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$, on a $D_X \vee D_Y = K_{p,q}$. De même pour $X = \{0\}$ et $n \geq 1$, on a $D_X \vee C_n = R_n$.

DEFINITION Le *complémentaire* du graphe simple $G = (X, A)$ est le graphe simple $\bar{G} = (X, \emptyset_2(X) - A)$.

EXERCICES

16. Montrer que si G est d'ordre n et est régulier de degré r , alors \overline{G} est régulier de degré $n - r - 1$.
17. Soit G_1 et G_2 deux graphes simples; montrer que $G_1 \approx G_2 \iff \overline{G}_1 \approx \overline{G}_2$.
18. Un graphe simple G est dit *auto-complémentaire* s'il est isomorphe à son complémentaire. Montrer que C_5 est auto-complémentaire.
19. Prouver que si G est auto-complémentaire, alors $|G| \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$, c.-à-d. $|G|$ est un multiple de 4 ou un multiple de 4 plus 1.
20. Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples auto-complémentaires d'ordre ≤ 7 .
21. Soit $n > 1$ et x un sommet de K_n ; montrer que $K_n - x \approx K_{n-1}$. Soit $p \geq 1$ et $q \geq 1$, et x_i , $1 \leq i \leq p$, un sommet de $K_{p,q}$; montrer que $K_{p,q} - x_i$ est isomorphe à $K_{p-1,q}$ si $p > 1$ et est isomorphe à D_q si $p = 1$.
22. Combien y a-t-il de graphes simples $G = (X,A)$ tels que $X = \{1,2,\dots,n\}$?
Parmi ceux-ci combien ont exactement m arêtes?
- *23. Un graphe $G = (X,A)$ est dit *pair* si tous ses sommets sont pairs. Montrer qu'il y a autant de graphes simples pairs sur $\{1,2,\dots,n+1\}$ que de graphes simples sur $\{1,2,\dots,n\}$.
24. Soit X et Y deux ensembles finis disjoints. Montrer que
- $D_X \cup D_Y = D_{X \cup Y}$
 - $K_X \vee K_Y = K_{X \cup Y}$
 - $K_X \cup K_Y = \overline{D_X \vee D_Y}$.

DEFINITION Une *bipartition* du graphe simple $G = (X,A)$ est une paire $\{Y,Z\}$ où $Y \subseteq X$, $Z \subseteq X$, $Y \cap Z = \emptyset$, $Y \cup Z = X$, et telle que $A \cap \rho_2(Y) = \emptyset$,

$A \cap \mathcal{P}_2(Z) = \emptyset$, c.-à-d. un partage de X en deux classes Y et Z telles qu'une arête de G relie toujours un sommet de Y à un sommet de Z . Le graphe simple G est dit *biparti* s'il admet une bipartition.

EXEMPLE 1 Par définition, $K_{p,q}$ est biparti.

EXEMPLE 2 Le graphe C_8 est biparti. En effet $Y = \{\text{cases blanches}\}$ et $Z = \{\text{cases noires}\}$ définissent la bipartition $\{Y,Z\}$ de C_8 .

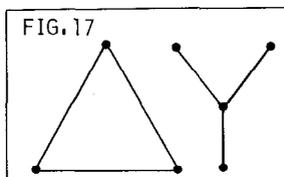
EXERCICES

- 25. Montrer que le graphe discret D_n , $n \geq 1$, admet exactement 2^{n-1} bipartitions distinctes.
- 26. Pour quelles valeurs de n le graphe simple suivant est-il biparti?
 - a. K_n
 - b. P_n
 - c. C_n
 - d. E_n
 - e. R_n
- 27. Prouver que tout sous-graphe d'un graphe biparti est biparti.

DEFINITION Soit $G = (X,A)$ un graphe simple, $|A| \neq 0$. Son *graphe-arête* (ou *graphe représentatif*) est le graphe simple $G^* = (A,B)$ où $\{a_1, a_2\} \in B \iff a_1 \in A, a_2 \in A, |a_1 \cap a_2| = 1$. Pour construire G^* , on prend comme sommets les milieux des arêtes de G ; les milieux des arêtes a_1 et a_2 sont ensuite liés par une arête dans G^* si et seulement si les arêtes a_1 et a_2 sont incidentes à un même sommet.

EXERCICES

- 28. Vérifier que les deux graphes simples suivants ont des graphes-arêtes isomorphes:



- 29. Trouver une expression pour le nombre d'arêtes de G^* .
- 30. Montrer que le graphe-arête de K_n est régulier de degré $2n - 4$ et a $\frac{1}{2}n(n - 1)(n - 2)$ arêtes.
- 31. Montrer que le graphe-arête de K_5 et le complémentaire du graphe de Petersen sont isomorphes, c.-à-d. $(K_5)^* \cong \overline{P(5,2)}$.

2 boucles et arêtes multiples

Certaines situations, pour être bien représentées, demandent la présence de boucles en certains sommets ou d'arêtes multiples entre certaines paires de sommets. Dans cette section, nous étendons la notion de graphe simple pour permettre ces possibilités.

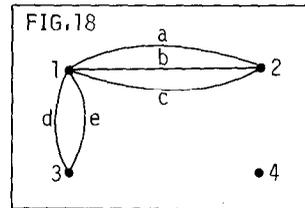
DEFINITION Un *graphe avec boucles* G est un couple (X, A) où X est un ensemble fini et $A \subseteq \mathcal{P}_2(X) \cup \mathcal{P}_1(X)$.

REMARQUE Dans un graphe avec boucles $G = (X, A)$, afin de conserver le lemme des poignées de mains, il est préférable de poser, pour $x \in X$,

$$d(x) = \begin{cases} |\{a \in \mathcal{P}_2(X) \cap A \mid x \in a\}| + 2 & \text{si } \{x\} \in A \\ |\{a \in \mathcal{P}_2(X) \cap A \mid x \in a\}| & \text{si } \{x\} \notin A. \end{cases}$$

DEFINITION Un *multigraphe* G est un triplet (X, A, f) où X et A sont des ensembles finis quelconques et $f : A \rightarrow \mathcal{P}_2(X)$ une fonction, dite *d'incidence*.

EXEMPLE Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{a, b, c, d, e\}$. Supposons que $f : A \rightarrow \mathcal{P}_2(X)$ est définie par $f(a) = f(b) = f(c) = \{1, 2\}$, $f(d) = f(e) = \{1, 3\}$. Ce multigraphe peut être représenté par la figure plane à droite :

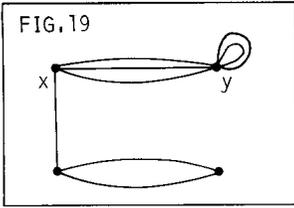


DEFINITION Un *multigraphe avec boucles* G est un triplet (X, A, f) où X et A sont des ensembles finis et $f : A \rightarrow \mathcal{P}_2(X) \cup \mathcal{P}_1(X)$ est une fonction. En d'autres mots, on permet la présence de boucles multiples en un sommet et d'arêtes multiples entre deux sommets donnés.

REMARQUE Pour $x \in X$, on pose alors

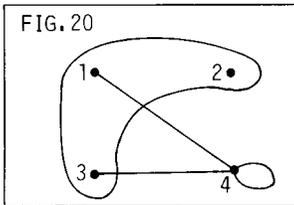
$$d(x) = |\{a \in A \mid f(a) \in \mathcal{P}_2(X) \text{ et } x \in f(a)\}| + 2|\{a \in A \mid f(a) = \{x\}\}|.$$

EXEMPLE Dans le multigraphe avec boucles représenté par la figure 19, on a $d(x) = 4$, $d(y) = 7$, ..., et $\sum_{z \in X} d(z) = 2 \cdot |A|$.



DEFINITION Un *hypergraphe* G est un couple (X, A) où $A \subseteq \mathcal{P}^*(X) = \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\}$.

EXEMPLE Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$.



REMARQUE Dans l'hypergraphe $G = (X, A)$, on définira le degré du sommet x par $d(x) = |\{a \in A \mid x \in a\}|$. On a alors $\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{a \in A} |a|$.

Une autre extension de la définition de graphe simple consiste à remplacer les arêtes par des "arêtes orientées", c.-à-d. des *flèches*. On obtient alors la notion de graphe orienté à laquelle nous reviendrons en détail au chapitre II.

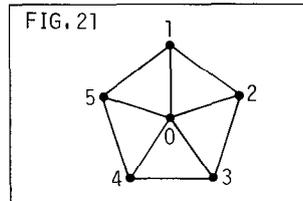
Pour la suite du chapitre I, afin de simplifier l'écriture, nous ne considérerons, sauf mention expresse du contraire, que des graphes simples.

3 chaîne, cycle; connexité

DEFINITION Dans un graphe simple $G = (X, A)$, une *chaîne* c est une séquence finie de sommets, x_0, x_1, \dots, x_m , telle que $\forall 0 \leq i < m, \{x_i, x_{i+1}\} \in A$. On écrit $c = [x_0, x_1, \dots, x_m]$. L'entier m s'appelle la *longueur* de la chaîne et on écrit $m = \ell(c)$. Les sommets x_0 et x_m sont appelés les *extrémités* respectivement *initiale* et *finale* de c . Lorsque $x_0 = x_m$, on dit que la chaîne est *fermée* et on l'appelle un

cycle en x_0 . En chaque sommet x , on admet le cycle $c = [x]$ de longueur zéro. Une chaîne de longueur ≥ 1 dont toutes les arêtes $\{x_i, x_{i+1}\}$ sont distinctes est dite *simple*. Une chaîne dont tous les sommets x_i (sauf peut-être x_0 et x_m) sont distincts est dite *élémentaire*.

EXEMPLE Dans la roue R_5 (fig. 21), la chaîne $c_1 = [1,0,2,3,4,0]$ est simple, la chaîne $c_2 = [5,0,2,1]$ est élémentaire, la chaîne $c_3 = [1,0,1,2,0,1]$ est un cycle et la chaîne $c_4 = [1,2,0,3,4,0,1]$ est un cycle simple. Pour chaque sommet i , la chaîne $[i]$ est un cycle élémentaire mais non simple.



REMARQUE Dans le graphe simple $G = (X,A)$, s'il existe une chaîne du sommet x au sommet y , alors il existe une chaîne élémentaire de x à y . En effet, soit $c = [x_0, x_1, \dots, x_m]$ une chaîne de x à y qui soit de longueur minimum. Cette chaîne est nécessairement élémentaire car si $x_i = x_j$ pour $0 < i < j \leq m$, alors $c' = [x_0, x_1, \dots, x_i, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_m]$ est une chaîne de x à y de longueur $m - j + i < m$. Ce qui contredit le choix de c .

DEFINITION Un graphe G est *connexe* si $\forall x, \forall y$, il existe une chaîne de x à y .

Sur l'ensemble X des sommets du graphe simple $G = (X,A)$, on définit la relation suivante: $x \sim y \iff$ il existe une chaîne de x à y dans G . Il est clair (voir la solution de l'exercice 37 page 125) que \sim est une relation d'équivalence sur X . Soit X_1, X_2, \dots, X_k les classes d'équivalence de \sim et posons, pour $1 \leq i \leq k$, $G_i = G_{X_i}$, le sous-graphe de G engendré par X_i . Ces graphes simples G_i (qu'on appelle les *composantes connexes* de G) sont connexes.

EXERCICES

32. Dans le graphe de Petersen, trouver des cycles simples de longueur respective 5, 6, 8 et 9.
33. Montrer que G et \bar{G} ne peuvent pas tous deux être non-connexes.
34. Montrer que si G est connexe, alors G^* est également connexe.

16 GRAPHES SIMPLES

- *35. Un bras de longueur k dans le graphe simple $G = (X, A)$ est une chaîne simple $[x_0, x_1, \dots, x_k]$, $k > 0$, telle que $d(x_0) = 1$, $d(x_1) = d(x_2) = \dots = d(x_{k-1}) = 2$ et $d(x_k) > 2$. Soit $B(G)$ la longueur du plus long bras de G .
- Prouver que: a. $G_1 \simeq G_2 \Rightarrow B(G_1) = B(G_2)$.
 b. s'il existe $x \in X$, $d(x) = 1$, alors $B(G^*) = B(G) - 1$.
 c. si $\forall x, d(x) \neq 1$, alors $B(G^*) = B(G) = 0$.
- *36. a. Montrer que si G est isomorphe à son graphe-arête, alors il est régulier de degré 2.
 b. Trouver tous les graphes simples isomorphes à leur graphe-arête.
- *37. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple ayant n sommets, m arêtes et k composantes connexes. Montrer qu'alors

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2} (n - k) (n - k + 1)$$
38. Prouver que si un graphe simple d'ordre n a plus de $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ arêtes, alors il est connexe.
- *39. Soit $G = P(n, k)$ le graphe de Petersen généralisé d'indices n et k où $n \geq 3$, $1 \leq k < n$ et $n \neq 2k$. Soit $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ et $H = G_Y$. Prouver que H est la réunion disjointe de (n, k) cycles chacun de longueur $\frac{n}{(n, k)}$ où (n, k) indique le plus grand commun diviseur de n et k .
40. Prouver qu'un graphe simple biparti connexe n'admet qu'une seule bipartition.

Voici une caractérisation très simple des graphes simples bipartis.

PROPOSITION Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Alors G est biparti si et seulement si G ne contient aucun cycle de longueur impaire.

Preuve: Supposons que le graphe simple biparti G contienne un cycle $[x_1, \dots, x_{2n+1}, x_1]$ de longueur impaire. Soit $\{Y, Z\}$, où $Y \cap Z = \emptyset$, $Y \cup Z = X$, une bipartition de G avec disons $x_1 \in Y$. Puisque $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$, $1 \leq i < 2n + 1$, on a $x_2 \in Z$, $x_3 \in Y$, ..., $x_{2n+1} \in Y$ et $x_1 \in Z$. Ce qui est absurde puisqu'alors $x_1 \in Y \cap Z = \emptyset$.

Inversement, supposons que G ne contienne aucun cycle de longueur impaire. Pour construire une bipartition de G , il suffit de construire une bipartition de chaque composante connexe de G . Supposons donc,

sans perte de généralité, que G soit connexe et soit $x_0 \in G$. On pose $Y = \{x \mid \exists c, \text{ chaîne de } x_0 \text{ à } x \text{ telle que } \ell(c) \text{ soit paire}\}$ et $Z = \{x \mid \exists c, \text{ chaîne de } x_0 \text{ à } x \text{ telle que } \ell(c) \text{ soit impaire}\}$. Puisque G est connexe, $X = Y \cup Z$. Pour voir que $Y \cap Z = \emptyset$, supposons le contraire. Soit $x \in Y \cap Z$. Prenons donc deux chaînes c_1 de x_0 à x et c_2 de x_0 à x telles que $\ell(c_1)$ soit paire et $\ell(c_2)$ soit impaire. La chaîne $c_1 + (-c_2)$ formée des sommets de c_1 , suivis de ceux de c_2 dans l'ordre inverse, est fermée et de longueur impaire. Ce qui contredit l'hypothèse sur G . Il est maintenant facile de voir que $\{Y, Z\}$ est une bipartition de G . En effet, soit $a = \{x, x'\} \in A$. Si $x \in Y$, alors il existe une chaîne $[x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}, x]$ de longueur paire de x_0 à x . On a donc $x' \in Z$ car $[x_0, x_1, \dots, x_{2k-1}, x, x']$ est une chaîne de longueur impaire de x_0 à x' . De même, si $x \in Z$, alors $x' \in Y$. Ceci termine donc la démonstration que $\{Y, Z\}$ est une bipartition de G .

REMARQUE Il est maintenant évident que C_n est biparti si et seulement si n est pair.

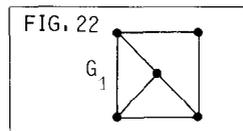
4 graphes eulériens et hamiltoniens

DEFINITION Un cycle eulérien (respectivement une chaîne eulérienne) dans G est un cycle (respectivement une chaîne) contenant chaque arête de G une et une seule fois.

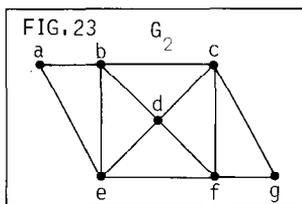
DEFINITION Un graphe simple est dit eulérien (respectivement semi-eulérien) s'il possède un cycle eulérien (respectivement une chaîne eulérienne).

REMARQUE Pour un multigraphe G , on a des définitions naturelles de chaîne, cycle, cycle eulérien et chaîne eulérienne. Un multigraphe est dit eulérien (respectivement semi-eulérien) s'il admet un cycle eulérien (respectivement une chaîne eulérienne).

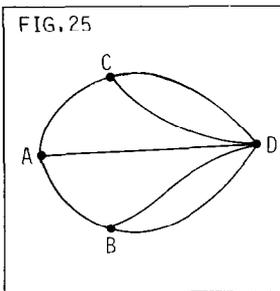
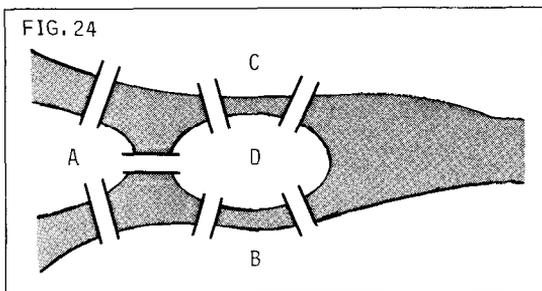
EXEMPLE 1 Le graphe simple G_1 (fig. 22) n'est pas eulérien et n'est pas semi-eulérien:



EXEMPLE 2 Le graphe simple G_2 (fig. 23) est eulérien puisque $c = [a,b,c,g,f,c,d,f,e,d,b,e,a]$ en est un cycle eulérien:



EXEMPLE 3 Voici le vieux problème (1736) des ponts de Königsberg. Dans la ville de Königsberg, dont voici une vue aérienne, il y a sept ponts (fig. 24):



Est-il possible de partir d'un point (sur la carte) et de se promener, en passant exactement une fois sur chaque pont, de façon à revenir à son point de départ? Considérons le multigraphe dont les quatre sommets A, B, C, D, sont les régions de terre (2 rives et 2 îles) et dont les arêtes sont les ponts reliant ces régions (fig. 25).

Le problème se ramène donc à trouver un cycle eulérien dans ce multigraphe.

Afin de résoudre le problème des ponts de Königsberg, ainsi que tous les problèmes analogues, Euler a trouvé la caractérisation suivante des graphes simples (et des multigraphes) eulériens.

THEOREME (Euler, 1766). Un graphe simple connexe $G = (X,A)$ est eulérien si et seulement si $\forall x \in X, d(x)$ est pair.

Preuve: Soit c un cycle eulérien du graphe simple eulérien G et x un sommet de G . La chaîne c contient alors les $d(x)$ arêtes ayant x comme extrémité. Comme c arrive à x autant de fois qu'il part de x , et comme il utilise chaque arête exactement une fois, $d(x)$ est pair.

Réciproquement, supposons que G n'a que des sommets pairs. Prenons $x_0 \in X$ et choisissons, en partant de x_0 , aussi longtemps que possible, de nouvelles arêtes pour former une chaîne simple c_1 . En fait, c_1 est

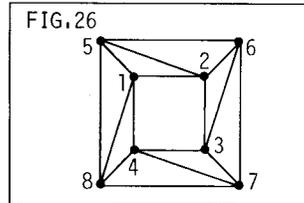
un cycle en x_0 , sinon l'extrémité finale de c_1 serait un sommet de degré impair. Si $A - c_1 = \emptyset$, alors c_1 est le cycle eulérien cherché. Si $A - c_1 \neq \emptyset$, soit x_1 un sommet par lequel passe c_1 et tel que dans le graphe partiel $G - c_1$, $d(x_1) > 0$. Ceci est possible car G est connexe. Remarquons que le graphe $G - c_1$ n'est pas nécessairement connexe mais que tous ses sommets sont pairs. Dans la composante connexe de $G - c_1$ contenant x_1 , construisons comme précédemment un cycle simple c'_2 de x_1 à x_1 . Rallongeons le cycle c_1 en insérant en x_1 le cycle c'_2 pour former un cycle, disons c_2 , de x_0 à x_0 dans G . Si $A - c_2 = \emptyset$, alors c_2 est le cycle eulérien cherché. Sinon la même construction appliquée à c_2 donne un nouveau cycle c_3 de x_0 à x_0 encore plus long. Comme $|A|$ est un entier fini, ce procédé aboutit à un cycle simple c_k en x_0 tel que $A - c_k = \emptyset$ et c_k est le cycle eulérien cherché.

EXEMPLE Appliquons la preuve du théorème précédent pour trouver un cycle eulérien dans le graphe simple suivant (régulier de degré 4) où $X = \{1, 2, \dots, 8\}$:

$$x_0 = 1, c_1 = [1, 2, 3, 4, 1, 5, 6, 7, 8, 1]$$

$$A - c_1 \neq \emptyset, x_1 = 8, c'_2 = [8, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8]$$

$$c_2 = [1, 2, 3, 4, 1, 5, 6, 7, 8, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 8, 1] = A.$$



LEMME Soit G un graphe simple connexe. Ce graphe simple est semi-eulérien si et seulement si il admet zéro ou deux sommets impairs.

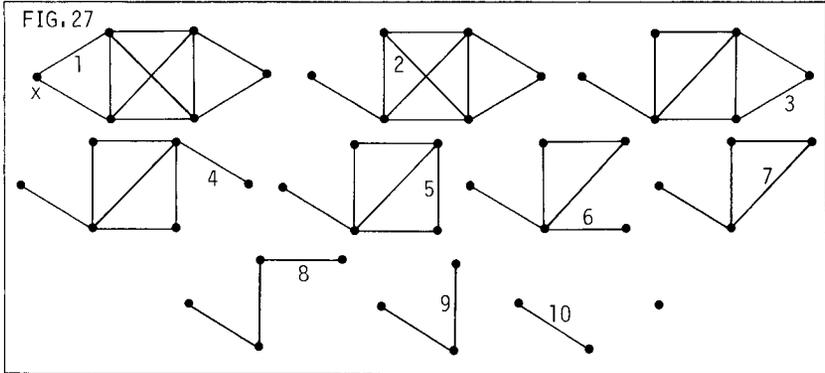
Preuve: Même preuve que le théorème précédent. Si $|I| = 0$, la chaîne sera un cycle et le graphe simple sera eulérien. Si $|I| = 2$, alors toute chaîne eulérienne de G aura les deux sommets impairs comme extrémités.

APPLICATION Etant donné une figure plane (page 87), elle pourra être tracée sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait, si et seulement si elle a zéro ou deux sommets impairs et n'est formée que d'un "morceau".

La preuve du théorème d'Euler nous permet de formuler l'algorithme de Fleury permettant de construire un cycle eulérien (respectivement chaîne eulérienne) dans un graphe eulérien (respectivement semi-eulérien) donné. Cet algorithme est constitué de deux étapes:

- choisir un sommet x (respectivement un sommet impair x) et une arête incidente à x ;
- choisir successivement des arêtes adjacentes de façon qu'à chaque étape, le graphe simple obtenu en effaçant l'arête choisie et peut-être un sommet autre que x devenu isolé, soit connexe.

EXEMPLE Appliquons l'algorithme de Fleury pour trouver un cycle eulérien dans un graphe simple (fig. 27).



DEFINITION Dans un graphe simple G , un cycle est dit *hamiltonien* (une chaîne est dite *hamiltonienne*) s'il (si elle) passe une et une seule fois par chaque sommet de G .

DEFINITION Le graphe simple G est *hamiltonien* (*semi-hamiltonien*) s'il possède un cycle hamiltonien (une chaîne hamiltonienne).

EXEMPLE (Euler). Le problème de "la marche du cavalier" est qu'il doit visiter toutes les cases d'un échiquier à l'aide de mouvements successifs de cavalier pour ensuite revenir à son point de départ. Ceci revient donc à trouver un cycle hamiltonien du graphe simple C_8 . En voici une solution donnant également un carré magique, c.-à-d. que la somme de chaque ligne ou colonne est la même, soit 260.

FIG. 28

2	11	58	51	30	39	54	15
59	50	3	12	53	14	31	38
10	1	52	57	40	29	16	55
49	60	9	4	13	56	37	32
64	5	24	45	36	41	28	17
23	48	61	8	25	20	33	42
6	63	46	21	44	35	18	27
47	22	7	62	19	26	43	34

La situation est beaucoup plus complexe pour les graphes simples hamiltoniens et semi-hamiltoniens qu'elle ne l'est pour les graphes simples eulériens et semi-eulériens. Il n'y a pas de "bonne" caractérisation des graphes simples hamiltoniens, seules quelques conditions suffisantes sont connues.

A titre d'illustration, considérons le théorème suivant:

THEOREME Soit $G = (X, A)$ un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si, pour toute paire de sommets non-adjacents x, y on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Preuve: La preuve est par l'absurde. Supposons donc que G satisfait aux conditions mais n'est pas hamiltonien. Sans perte de généralité, supposons G maximal, c.-à-d. que l'ajout d'une arête quelconque à G le rend hamiltonien. Soit x et y deux sommets non-adjacents. (Ils existent puisque $n > 3$ et G n'est pas complet). Puisque $G + \{x, y\}$ est hamiltonien, il existe dans G une chaîne simple passant par chaque sommet une et une seule fois. Disons $[x = v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n = y]$. Soit $S = \{i \mid \{v_1, v_{i+1}\} \in A\}$ et $T = \{i \mid \{v_i, v_n\} \in A\}$. On a $1 \in S$, $n-1 \notin S$, $n \notin S$, $1 \notin T$, $n-1 \in T$ et $n \notin T$. De plus, $S \cap T = \emptyset$ car si $i \in S \cap T$, alors $\{v_1, v_{i+1}\}$ et $\{v_i, v_n\}$ sont dans A et

$$[v_1, v_2, \dots, v_i, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1]$$

est un cycle hamiltonien de G ce qui contredit le choix de G . On a donc $d(x) + d(y) = |S| + |T| = |S \cup T| \leq |\{1, 2, \dots, n-1\}| < n$.

Contradiction.

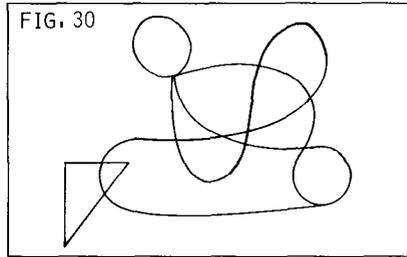
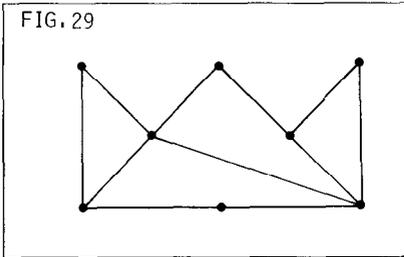
COROLLAIRE (Théorème de Dirac (1952)). Si G est un graphe simple d'ordre $n \geq 3$ et \forall sommet x , on a $d(x) \geq \frac{1}{2}n$, alors G est hamiltonien.

Preuve: On voit facilement que G répond aux conditions des hypothèses du théorème précédent. En effet, si x et y ne sont pas adjacents, alors $d(x) + d(y) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$.

EXERCICES

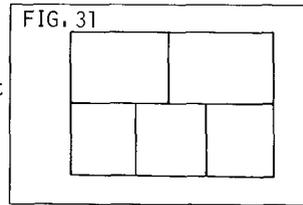
41. Les figures suivantes peuvent-elles être tracées sans lever le

crayon et sans passer deux fois sur un même trait (si oui, comment)?



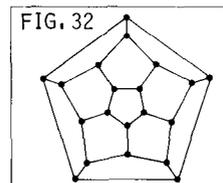
42. Trouver un graphe simple eulérien non-hamiltonien et un graphe simple hamiltonien non-eulérien.
43. Les graphes simples suivants sont-ils connexes? eulériens? hamiltoniens? a. T_8 b. F_8 c. R_8 d. C_8

44. Est-il possible de tracer une courbe continue coupant chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois?

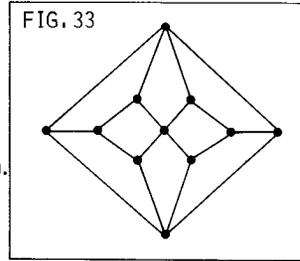


45. Prouver que si G est eulérien, alors son graphe-arête G^* est hamiltonien.
46. Soit G le graphe de Petersen. Prouver que G n'est pas hamiltonien mais est semi-hamiltonien. Prouver que $\forall x \in X, G - x$ est hamiltonien.
47. Pour quelles valeurs de p et q les graphes simples suivants sont-ils eulériens? hamiltoniens?
- a. K_p b. $K_{p,q}$ c. R_p

48. (Hamilton) Le graphe simple suivant appelé le dodécaèdre, est-il hamiltonien?



49. Prouver que si G est un graphe simple biparti et d'ordre impair > 1 , alors G est non-hamiltonien. En déduire que le graphe simple (fig. 33), appelé le *graphe de Herschel*, est non-hamiltonien.



50. Onze personnes désirent se réunir une fois par jour autour d'une table circulaire. Si aucune des personnes n'accepte d'avoir deux fois un même voisin, pendant combien de jours consécutifs peuvent-elles se réunir et comment se placeront-elles?
51. Douze personnes, dont 6 hommes et 6 femmes, désirent se réunir une fois par jour autour d'une table circulaire. Si chacune des personnes exige d'être entourée par deux personnes du sexe opposé et de ne jamais avoir deux fois un même voisin, pendant combien de jours consécutifs peuvent-elles se réunir et comment se placeront-elles?
- **52. DEFINITION Un cavalier de type (r,s) , $r \geq 1$, $s \geq 1$, se déplace en bougeant de r cases dans une direction et de s cases dans une des deux directions perpendiculaires. Soit $C(n,m; r,s)$ le graphe simple du mouvement d'un cavalier de type (r,s) sur un échiquier n par m , $n > 1$, $m > 1$, c.-à-d. n colonnes de m cases.
- Prouver que :
- si $r + s \equiv 0 \pmod{2}$ ou si $(r,s) > 1$, alors $C(n,m; r,s)$ est non-hamiltonien.
 - si $r + s \equiv 1 \pmod{2}$ et $nm \equiv 1 \pmod{2}$, alors $C(n,m; r,s)$ est non-hamiltonien.
 - $\forall n$, $C(4,n; 1,2)$ est non-hamiltonien.
- Prouver que les graphes simples $C(3,10; 1,2)$, $C(5,24; 1,4)$ et $C(5,20; 2,3)$ sont hamiltoniens.

- **53. Soit T un triangle dont les sommets P_0 , P_1 et P_2 sont respectivement étiquetés 0, 1 et 2. Considérons une triangulation de T , c.-à-d. une subdivision de T en petits triangles telle que

si deux petits triangles se touchent, c'est qu'ils ont un sommet ou un côté en commun. Etiquetons arbitrairement 0, 1 et 2 les sommets de la triangulation, autres que P_0, P_1, P_2 , de sorte que les sommets sur le segment $P_i P_j$ aient des étiquettes choisies dans l'ensemble $\{i, j\}$, $0 \leq i \leq 2$, $0 \leq j \leq 2$, $i \neq j$. Démontrer qu'alors au moins un petit triangle reçoit les 3 étiquettes. Ce résultat s'appelle le lemme de Sperner et a d'importantes conséquences en topologie. On peut, par exemple, l'utiliser pour démontrer le théorème du point fixe de Brouwer: toute fonction continue $f : T \rightarrow T$ admet un point fixe, c.-à-d. $\exists x \in T$ tel que $f(x) = x$.

5 autres définitions

Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Pour $x, y \in X$, posons

$$d(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{si } \{c \mid c \text{ est une chaîne de } x \text{ à } y\} = \emptyset \\ \min \{\ell(c) \mid c \text{ est une chaîne de } x \text{ à } y\} & \text{autrement.} \end{cases}$$

LEMME Si G est connexe, alors la fonction $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est une distance sur l'ensemble X des sommets de G .

Preuve. Bien sûr, on a $0 \leq d(x, y) < \infty$ et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$. De plus, en renversant les chaînes, on voit immédiatement que $d(x, y) = d(y, x)$. Finalement, si $d(x, y) = n$ et $d(y, z) = m$, il y a alors une chaîne de longueur $n + m$ de x à z . On a donc, $d(x, z) \leq n + m = d(x, y) + d(y, z)$, et l'inégalité du triangle est bien vérifiée.

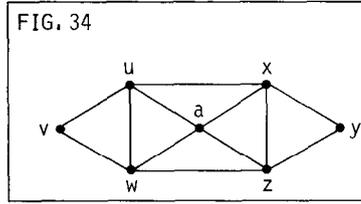
Dans le chapitre 3, nous verrons plusieurs algorithmes permettant de calculer, dans un graphe simple (ou dans un graphe orienté), la distance entre deux sommets donnés.

DEFINITION Un *géodésique* de x à y est une chaîne de x à y de longueur $d(x, y)$.

DEFINITION Le *diamètre* $\delta(G)$ du graphe simple connexe G est la longueur du plus long géodésique de G . On a $\delta(G) = \max \{d(x,y) \mid x,y \in X\}$.

EXEMPLE Ici $d(a,y) = 2$, $d(a,x) = 1$, $d(v,y) = 3$ et $\delta(G) = 3$. De plus, $[v,u,x,y]$ et $[v,w,z,y]$ sont deux géodésiques de longueur maximum. Notez que $[v,u,a,w,z,x,y]$ est une chaîne élémentaire de longueur 6 dans G .

FIG. 34



DEFINITION L'*excentricité* du sommet x est le nombre $e(x) = \max_{y \in X} d(x,y)$.

DEFINITION Un *centre* de G est un sommet x d'excentricité minimum, c.-à-d. un x tel que $e(x) = \min_{y \in X} e(y)$.

DEFINITION Le *rayon* de G , noté $r(G)$, est l'excentricité d'un centre quelconque de G .

REMARQUE On a donc $\min_{x \in X} e(x) = r(G)$ et $\max_{x \in X} e(x) = \delta(G)$.

EXEMPLE Dans l'exemple (fig. 34), les excentricités des sommets sont: $e(a) = e(u) = e(x) = e(z) = e(w) = 2$ et $e(y) = e(v) = 3$. Ce graphe simple a pour rayon 2 et admet cinq centres.

EXERCICES

54. Pour les graphes simples K_n , C_n , R_n , E_n et $K_{n,m}$,
 - a. trouver l'excentricité de chaque sommet;
 - b. trouver le diamètre et le rayon.
55. Montrer que E_n et R_n n'ont qu'un seul centre mais que C_n en a n (où $n \geq 3$).
56. Prouver que dans un graphe simple G , on a toujours $\delta(G) \leq 2r(G)$.

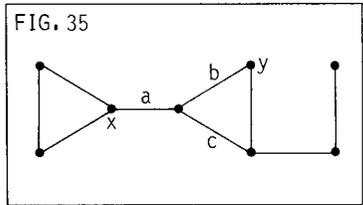
26 **GRAPHES SIMPLES**

*57. Prouver que dans un graphe simple connexe G , deux chaînes élémentaires de longueur maximum ont toujours au moins un sommet en commun.

DEFINITION Un *séparateur* du graphe simple $G = (X,A)$ est un ensemble B d'arêtes tel que le graphe simple $(X, A-B)$ soit non-connexe, mais $\forall b \in B, (X, A-(B-\{b\}))$ soit connexe.

DEFINITION Si $\{a\}$ est un séparateur de G , alors l'arête a est appelée un *isthme* (ou un *pont*) de G .

EXEMPLE Ici $\{b,c\}$ est un séparateur, $\{a,b\}$ ne l'est pas et l'arête a est un isthme.



DEFINITION Si B est un séparateur du graphe simple connexe G , alors $(X, A-B)$ a exactement deux composantes appelées les *rives* du séparateur. Si chacune de ces rives possède un cycle simple, alors le séparateur est dit *non-trivial* (sinon il est dit *trivial*).

EXEMPLE 1 Dans le graphe simple de la figure 35, $\{b,c\}$ et $\{a\}$ sont des séparateurs mais seul $\{a\}$ est non-trivial.

EXEMPLE 2 Dans le graphe de Petersen, les rayons, c.-à-d. les arêtes $\{x_i, y_i\}, 1 \leq i \leq 5$, forment un séparateur non-trivial de cardinalité 5.

DEFINITION Un sommet x est un *point d'articulation* du graphe simple connexe $G = (X,A)$ si le graphe simple $G - x$ n'est pas connexe.

EXEMPLE Dans le graphe simple de la figure 35, le sommet x est un point d'articulation mais y ne l'est pas.

DEFINITION Un *facteur linéaire* de $G = (X,A)$ est un graphe partiel $L = (X,B)$ qui est régulier de degré 1.

REMARQUE Si G admet un facteur linéaire, alors $\text{ord } G$ est un entier

pair. En effet, $\text{ord } G = \text{ord } L = |X| = \sum_{x \in X} 1 = \sum_{x \in X} \deg x = 2|B|$.

DEFINITION Une *factorisation linéaire* de $G = (X,A)$ est une partition des arêtes, $A = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k$, telle que $L_i = (X, B_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, soit un facteur linéaire de G . Dire que $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ est une partition de A veut évidemment dire:

$$1) \bigcup_{i=1}^k B_i = A, \quad 2) i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{et} \quad 3) \forall i, B_i \neq \emptyset.$$

REMARQUE Si G admet une factorisation linéaire $A = B_1 \cup \dots \cup B_k$, alors G est régulier de degré k .

DEFINITION Une *factorisation linéaire* $A = B_1 \cup \dots \cup B_k$ de $G = (X,A)$ est dite *hamiltonienne* si $\forall i \neq j, B_i \cup B_j$ forme un cycle hamiltonien de G .

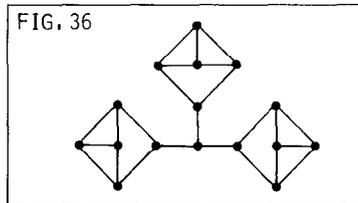
DEFINITION Un graphe simple est dit *fortement hamiltonien* s'il admet une factorisation linéaire hamiltonienne.

DEFINITION Un graphe fortement hamiltonien est dit *purement hamiltonien* si toutes ses factorisations linéaires sont hamiltoniennes.

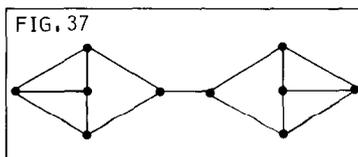
DEFINITION Un graphe simple est un *U-graphe* s'il admet exactement une factorisation linéaire.

EXERCICES

58. Montrer que le graphe simple suivant (qui est d'ordre 16) n'admet aucun facteur linéaire:



59. Montrer que le graphe simple suivant possède des facteurs linéaires mais n'a pas de factorisation linéaire:

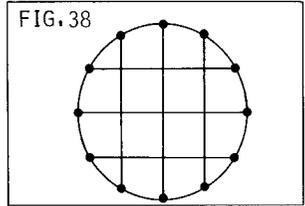


28 **GRAPHES SIMPLES**

60. Prouver qu'un U-graphe est toujours purement hamiltonien.

*61. Le graphe de Petersen possède-t-il une factorisation linéaire?

62. Trouver une factorisation linéaire hamiltonienne et une factorisation linéaire non-hamiltonienne du graphe simple suivant:



63. Montrer comment une factorisation linéaire de K_{10} peut servir à organiser un tournoi rotation entre 10 joueurs, c.-à-d. un tournoi où chaque joueur joue contre les 9 autres.

64. Soit $G = (X,A)$ et $G' = (X',A')$ deux graphes simples cubiques. Soit $A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ et $A'_i = B'_1 \cup B'_2 \cup B'_3$ des factorisations linéaires hamiltoniennes de G et G' respectivement; de plus, soit $x \in X$ et $x' \in X'$. Le mariage ω de G et G' par rapport aux sommets x et x' (noté $G\omega G'$) s'obtient de $G \cup G'$ en enlevant les sommets x et x' , et en remplaçant, pour $i = 1, 2, 3$, les deux arêtes $a_i = \{y_i, x\} \in B_i$ et $a'_i = \{y'_i, x'\} \in B'_i$ par l'arête $c_i = \{y_i, y'_i\}$. Montrer que $\{C_1, C_2, C_3\}$, où $C_i = (B_i - \{a_i\}) \cup (B'_i - \{a'_i\}) \cup \{c_i\}$, pour $i = 1, 2, 3$, est une factorisation linéaire hamiltonienne de $G\omega G'$. Vérifier que K_n est fortement hamiltonien et en déduire que $\forall k \geq 2$, il existe un graphe simple fortement hamiltonien cubique d'ordre $2k$.

*65. Prouver le lemme suivant de Blanche Descartes: soit $G = (X,A)$ un graphe simple cubique, $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ une factorisation linéaire de G et $S \subseteq A$ un séparateur de G alors les trois entiers $|S \cap A_1|$, $|S \cap A_2|$ et $|S \cap A_3|$ ont la même parité, c.-à-d. sont tous trois pairs ou tous trois impairs. Prouver que le graphe de Petersen n'admet aucune factorisation linéaire.

6 énigmes

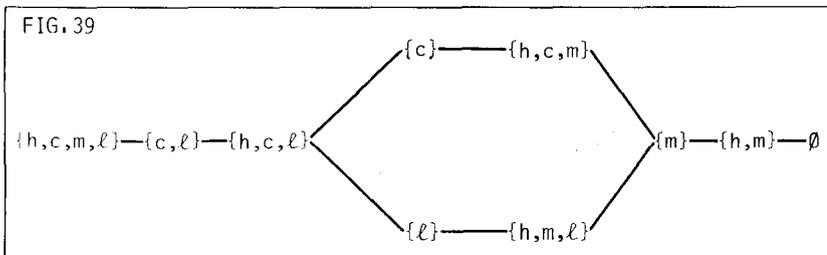
Par *énigme*, on entend jeu à une personne. Dans un tel jeu, il existe plusieurs positions ; un ensemble de règles (ou de restrictions) permet au joueur de passer d'une position à une autre. Le jeu débute à la position dite initiale et, pour résoudre l'énigme, le joueur doit aboutir à une des positions déclarées gagnantes (ou finales). Une énigme permet de construire un graphe simple dont les sommets sont les positions et les arêtes, les mouvements possibles suivant les règles. Résoudre l'énigme revient donc à trouver une chaîne de la position initiale à une des positions finales.

Afin de clarifier ces propos philosophiques, passons tout de suite à quelques exemples simples.

ENIGME 1 Un fermier veut traverser une rivière avec son chien, son mouton et 5 kilos de laitue. Il dispose d'une petite chaloupe ne pouvant contenir que lui et un des items précités et, de plus, il ne peut laisser seuls ni le chien avec le mouton, ni le mouton avec la laitue. Comment arrivera-t-il à faire traverser le tout?

Solution: Dénotons h = homme et chaloupe, c = chien, m = mouton, ℓ = laitue.

Considérons le graphe simple dont les sommets sont les sous-ensembles de $\{h,c,m,\ell\}$, correspondant à ce qui se trouve sur la rive initiale de la rivière, et dont les arêtes correspondent aux traversées possibles. Résoudre cette énigme consiste à trouver une chaîne du sommet $\{h,c,m,\ell\}$ au sommet \emptyset dans ce graphe simple (fig. 39).



Il y a deux chaînes simples de $\{h,c,m,\ell\}$ à \emptyset , soit deux solutions ne demandant que sept traversées.

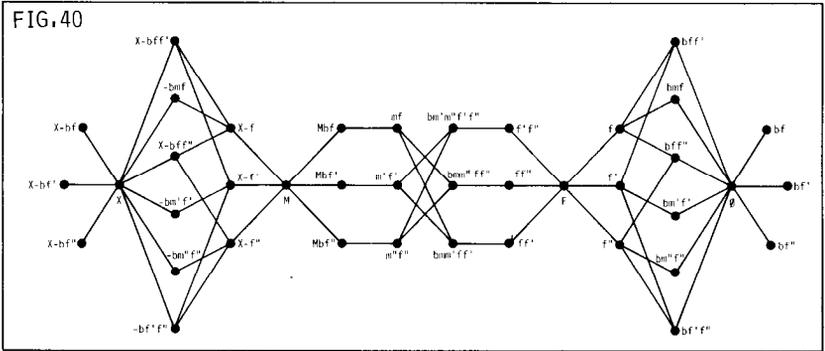
ENIGME 2 Le problème des "maris jaloux".

Trois maris et leurs trois femmes veulent traverser la même rivière avec la même chaloupe qu'à l'énigme 1. Cette fois-ci, la restriction est qu'une femme ne doit jamais être avec un autre homme sans que son mari soit présent.

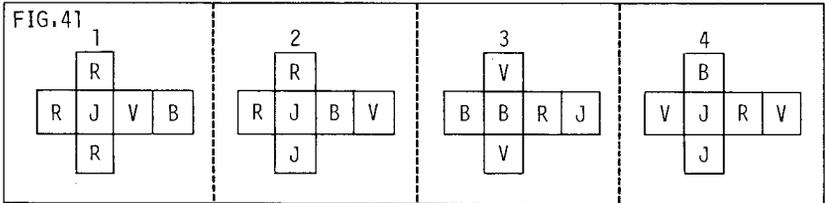
Solution: On baptise tout ce monde-ci m, m', m'', f, f', f'' et b = bateau.

Les sommets de notre graphe simple sont les sous-ensembles de {b,m,m',m'',f,f',f''} correspondant à ce qu'il y a sur la rive initiale. Résoudre cette énigme consiste à trouver une chaîne du sommet {b,m,m',m'',f,f',f''} au sommet ∅.

Voici la composante connexe du sommet ∅, où X = {b,m,m',m'',f,f',f''}, F = {b,f,f',f''} et M = {m,m',m''}.



ENIGME 3 Ce casse-tête est connu sous le nom d'Instant Insanity. Soit quatre cubes dont les faces sont coloriées en rouge, jaune, vert ou bleu comme dans la figure 41.

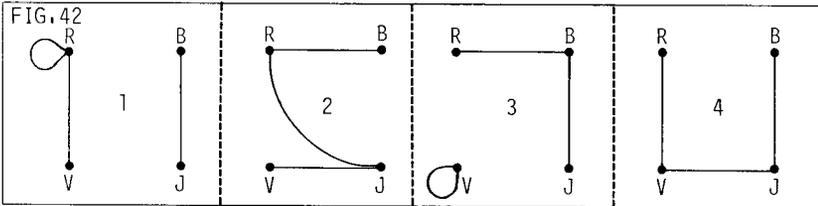


On doit les placer en une colonne de façon à ce que les quatre couleurs apparaissent sur chacune des quatre grandes faces de la colonne.

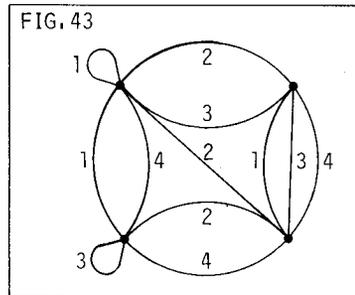
Il est facile de passer des heures à chercher une solution; certains

en sont même devenus fous! Voici une solution de ce casse-tête basée sur la théorie des graphes.

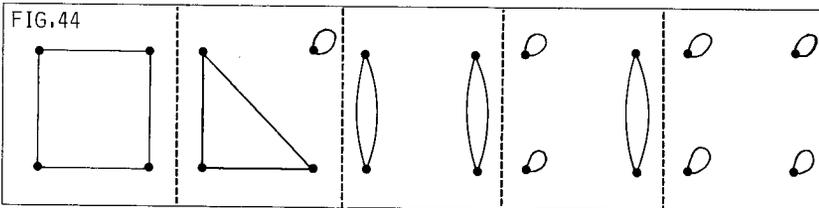
A chacun des cubes on associe un graphe (avec boucles) d'ordre 4 dont les sommets sont $\{R, B, J, V\}$ et les arêtes sont les paires de couleurs apparaissant sur les faces opposées de ce cube:



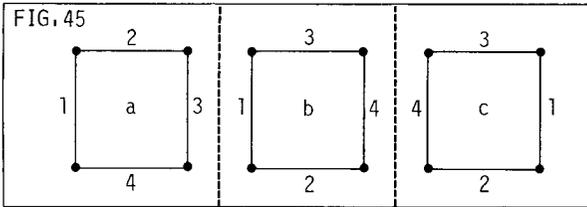
La réunion de ces graphes avec boucles donne le multigraphe avec boucles suivant (fig. 43).



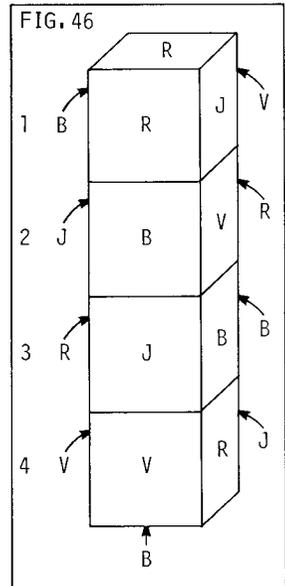
Chaque fois qu'on prend dans ce multigraphe quatre arêtes numérotées 1, 2, 3 et 4 (c.-à-d. une arête provenant de chacun des quatre graphes avec boucles de la fig. 42) et formant un multigraphe partiel qui soit régulier de degré 2, on peut utiliser ces 4 paires de faces opposées pour placer en colonne les quatre cubes de façon à voir les 4 couleurs sur deux grandes faces opposées. Le multigraphe partiel cherché (régulier de degré 2) peut être isomorphe à un quelconque des multigraphes de la figure 44.



Pour le multigraphe de la figure 43, on trouve exactement trois graphes partiels réguliers de degré 2; soit ceux a), b) et c), de la figure 45.



Comme a) et c) ont des arêtes disjointes, on peut s'en servir simultanément pour placer les cubes. Les faces "derrière-devant" se trouvent en utilisant la figure 45a et les faces "gauche-droite", en utilisant la figure 45c. La solution ainsi construite est décrite par la figure 46. Il est à noter qu'on a également prouvé que c'est l'unique solution (sans tenir compte des permutations des cubes et des rotations de la colonne).

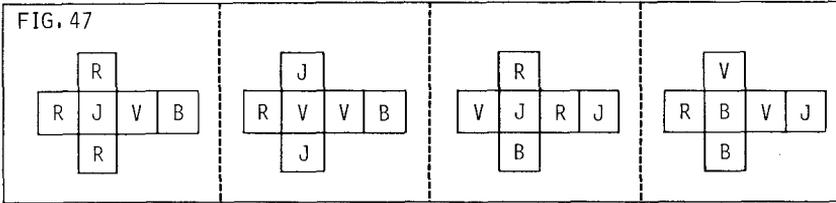


REMARQUE Cette méthode s'applique évidemment pour tout autre coloriage des 4 cubes d'"Instant Insanity" (voir exercice 68). On peut également l'appliquer à une colonne de n cubes sur lesquels apparaissent n couleurs. Une autre énigme, du même type, s'appelle "Double Disaster"; elle consiste, à l'aide de 8 cubes dont les faces sont coloriées de 4 couleurs différentes, à former un gros cube $2 \times 2 \times 2$ dont chacune des 4 couleurs apparaît sur les six grandes faces.

EXERCICES

66. Même chaloupe qu'à l'énigme 2, mais cette fois on veut faire traverser 3 missionnaires, m, m', m'' , et trois cannibales, c, c', c'' . Seuls m, m', m'' et c savent manoeuvrer une chaloupe et, bien sûr, si les cannibales sont lors d'une traversée, majoritaires, ils mangent les missionnaires présents. Comment faire la traversée?

67. Prouver que le problème des maris jaloux n'a pas de solution s'il y a quatre couples. Prouver qu'il y a alors une solution si, a) de plus la chaloupe peut contenir trois personnes, b) ou s'il y a un îlot au milieu de la rivière permettant d'y laisser des gens.
68. Résoudre le problème d'"Instant Insanity" pour les cubes donnés à la figure 47.

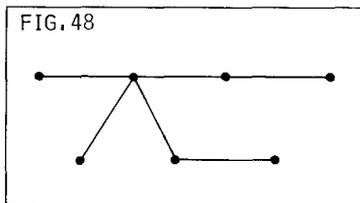


7 arbres

DEFINITION Une *forêt* est un graphe simple $G = (X, A)$ sans cycle simple.

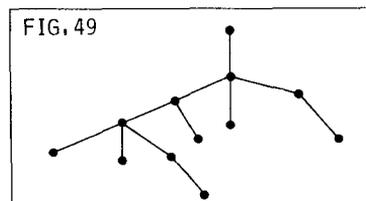
DEFINITION Un *arbre* est une forêt connexe, c.-à-d. un graphe simple connexe et sans cycle simple.

EXEMPLE 1

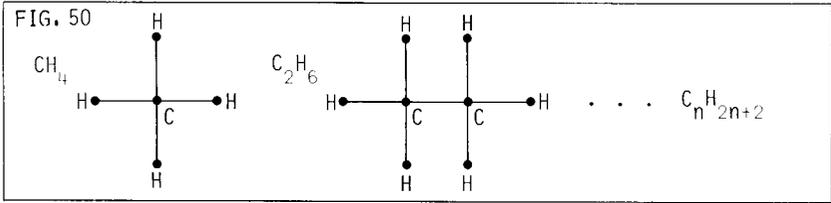


EXEMPLE 2 Le graphe d'un tournoi par élimination.

EXEMPLE 3 Un arbre généalogique; par exemple celui de la famille Bernoulli (seulement les mathématiciens).



EXEMPLE 4 Les paraffines en chimie qui ont été étudiées par Cayley:



DEFINITION Dans l'arbre $G = (X,A)$, le sommet x est dit *pendant* si $d(x) = 1$.

PROPOSITION Un arbre $G = (X,A)$, où $|X| \geq 2$, possède toujours au moins deux sommets pendants.

Preuve: Soit $c = [x_0, x_1, \dots, x_r]$ une chaîne simple et de longueur maximum dans G . Nous allons montrer que $x_0 \neq x_r$ et $d(x_0) = d(x_r) = 1$. Comme $|X| \geq 2$ et G est connexe, on a bien sûr $r \geq 1$. De plus $x_0 \neq x_r$ car G n'admet aucun cycle simple. Si $d(x_r) > 1$, soit $\{x_r, x\}$ une arête de G où $x \neq x_{r-1}$. Il s'ensuit que $[x_0, x_1, \dots, x_r, x]$ est une chaîne simple de longueur $r + 1$. Ce qui contredit le choix de c de longueur maximum. On a donc $d(x_r) = 1$. De même, par symétrie, on voit que $d(x_0) = 1$.

REMARQUE Il est facile de démontrer que les seuls arbres n'admettant que deux sommets pendants sont isomorphes aux P_n , $n \geq 2$.

PROPOSITION Soit $G = (X,A)$ un graphe simple connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- 1) G est un arbre.
- 2) $|A| = |X| - 1$.
- 3) $\forall x \neq y$, il existe une seule chaîne simple de x à y .

Preuve: Prouvons d'abord 1) \Leftrightarrow 2), par récurrence sur $|X| = n$. Si $n = 1$, on a alors $|X|=1$ et $|A| = 0$, et 1) \Leftrightarrow 2) est bien vérifié. Supposons que pour tout arbre $G = (X,A)$ d'ordre k on ait $|A| = k - 1$ et soit $H = (Y,B)$ un arbre d'ordre $k + 1$. Soit y un sommet pendant

de H . Il est évident que $H - y$ est un arbre d'ordre k . Par hypothèse d'induction, $H - y$ a $k - 1$ arêtes. Comme y est pendant, on voit que H a $k = (k + 1) - 1$ arêtes, c.-à-d. que 2) est vérifié pour l'arbre H .

Pour démontrer 2) \Rightarrow 1), supposons au contraire qu'il existe un graphe connexe $G = (X, A)$ qui ne soit pas un arbre mais pour lequel $|A| = |X| - 1$. Il est clair que si on enlève de A une arête appartenant à un cycle simple de G , alors le graphe simple restera connexe. Faisons donc ceci successivement jusqu'à ce qu'on obtienne un graphe partiel $H = (X, B)$, $B \subset A$, de G qui soit sans cycle simple et connexe, c.-à-d. que H est un arbre. Puisque 1) \Rightarrow 2) a précédemment été démontré, on a $|B| = |X| - 1$. Or $|A| = |X| - 1 = |B| < |A|$ est absurde. On en conclut donc que 2) \Rightarrow 1).

Démontrons 3) \Rightarrow 1). Soit $G = (X, A)$ un graphe simple connexe qui ne soit pas un arbre et $c = [x_0, x_1, \dots, x_r, x_0]$ un cycle simple de G . Alors $[x_0, x_1, \dots, x_i]$ et $[x_0, x_r, x_{r-1}, \dots, x_i]$, $0 < i \leq r$, sont deux chaînes simples (non seulement différentes mais avec des ensembles d'arêtes disjoints) reliant x_0 à x_i . Réciproquement, si $G = (X, A)$ est un graphe simple connexe dans lequel deux sommets, x et y par exemple, sont reliés par deux chaînes simples $c_1 = [x, x_1, \dots, x_{r-1}, y]$ et $c_2 = [x, y_1, \dots, y_{s-1}, y]$. Le cycle $c_1 + c_2^{-1} = [x, x_1, \dots, x_{r-1}, y, y_{s-1}, \dots, y_1, x]$ n'est pas nécessairement simple mais contient un cycle simple. G n'est donc pas un arbre. On a donc 1) \Rightarrow 3).

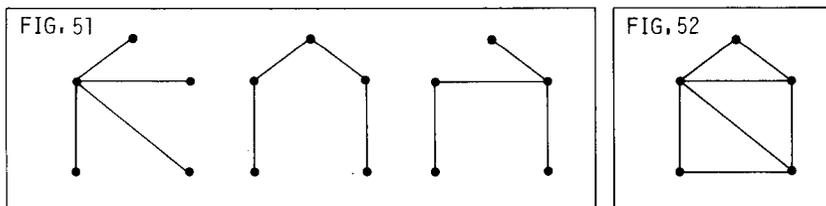
REMARQUE On peut à nouveau démontrer qu'un arbre $G = (X, A)$, où $|X| \geq 2$, admet au moins deux sommets pendants. En effet, si ce n'était pas le cas, on aurait $|\{x \mid d(x) = 1\}| \leq 1$ et alors, posant $n = |X|$,

$$\sum_{x \in X} d(x) \geq 2(n - 1) + 1 = 2n - 1 > 2(n - 1) = 2|A| = \sum_{x \in X} d(x),$$

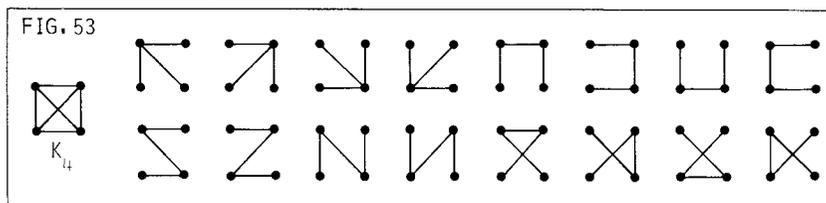
ce qui est absurde.

DEFINITION Un *arbre partiel* de G est un graphe partiel de G qui est un arbre.

EXEMPLE Les trois arbres de la figure 51 sont des arbres partiels du graphe simple de la figure 52.



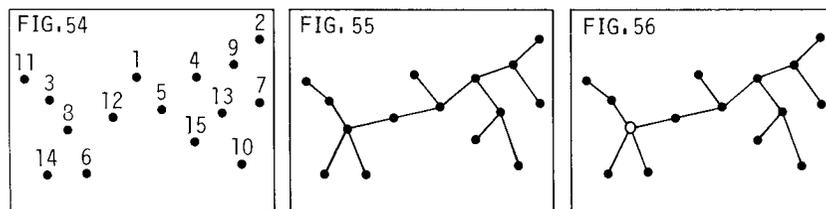
Au cours de ses recherches en chimie, Cayley a cherché à dénombrer les arbres partiels de K_n . Par exemple, K_4 admet 16 arbres partiels (fig. 53).



Cayley a démontré le théorème qui suit donnant une formule explicite pour le nombre d'arbres partiels dans K_n . Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème (voir par exemple le livre de J.W. Moon [11]). Nous donnons ici une preuve basée sur la théorie des espèces de structures d'André Joyal (UQAM) [19].

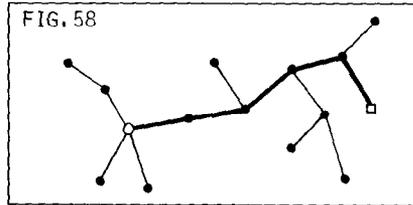
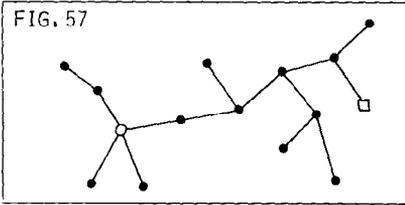
THEOREME (Cayley) Le graphe complet K_n admet n^{n-2} arbres partiels.

Preuve: Soit U un ensemble de n points numérotés de 1 à n (fig. 54 où $n = 15$). Un arbre sur U est simplement un arbre dont l'ensemble des sommets est U (fig. 55). Soit $A(U)$ l'ensemble des arbres sur U . Nous voulons démontrer que $A(U)$ a n^{n-2} éléments. Une *arborescence* sur U est un arbre sur U dont un sommet (appelé la *racine*) a été distingué (o dans la fig. 56).



Un *vertébré* sur U est un arbre sur U dans lequel on a choisi un premier sommet o et un deuxième sommet \square (pouvant être le même que o)

(fig. 57). L'unique chaîne de \circ à \square s'appelle alors la *colonne vertébrale* du vertébré (fig. 58). Soit $V(U)$ l'ensemble des vertébrés sur U .

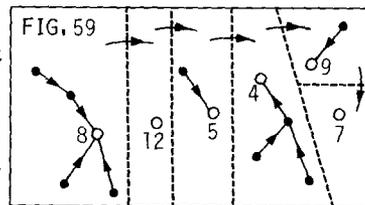


Etant donné un arbre sur U , il y a n façons d'y choisir un premier sommet et n façons d'y choisir un deuxième. Il y a donc n^2 fois plus de vertébrés que d'arbres sur U , c.-à-d. $|V(U)| = n^2|A(U)|$. Nous allons compter le nombre de vertébrés sur U et montrer qu'il y en a n^n . Soit $\Phi(U)$ l'ensemble des endofonctions de U (c.-à-d. fonctions de U dans lui-même). Chacun des n éléments de U ayant n images possibles, il est clair que $|\Phi(U)| = n^n$.

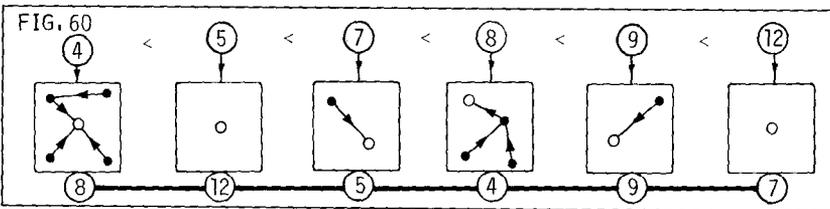
Les figures 57 à 62 décrivent une bijection entre les ensembles $V(U)$ et $\Phi(U)$, c.-à-d. une construction permettant d'associer à tout vertébré sur U une et une seule fonction de U dans U et réciproquement.

On en conclut donc que $|A(U)| = \frac{1}{n^2} \cdot |V(U)| = \frac{1}{n^2} \cdot |\Phi(U)| = \frac{1}{n^2} \cdot n^n = n^{n-2}$.

Considérons le vertébré de la figure 57 et traçons sa colonne vertébrale (fig. 58). Opérons le vertébré, c.-à-d. tranchons les arêtes de sa colonne vertébrale (fig. 59). On obtient une suite d'arborescences (dont on oriente les arêtes vers la racine) qui étaient rattachées le long de la colonne par leur racine. Les arborescences obtenues ont pour indice le numéro de leur racine.

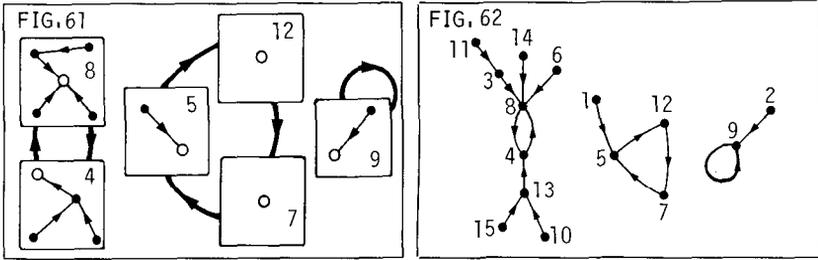


Au-dessus de la suite d'arborescences, inscrivons la suite de ces indices dans l'ordre croissant des entiers naturels (fig. 60).



On obtient ainsi une permutation d'arborescences pour laquelle on

écrit les cycles (fig. 61). Dans notre exemple, la permutation sur $\{4,5,7,8,9,12\}$ envoie 4 dans 8, 5 dans 12, 7 dans 5, 8 dans 4, 9 dans 9 et 12 dans 7. Ses cycles sont 4 dans 8 qui va dans 4, 5 dans 12 qui va dans 7 qui retourne dans 5 et finalement 9 dans 9. Finalement, rattachons, par leur racine, les arborescences aux cycles de la permutation. On obtient (fig. 62) la représentation (graphe sagittal) d'une endofonction de U .



Il est facile de voir que la construction (fig. 57 à 62) définit une bijection entre $V(U)$ et $\Phi(U)$. On peut également faire la construction inverse.

Les définitions qui suivent permettent en quelque sorte, pour un graphe G donné, de compter le nombre maximum de cycles simples "indépendants les uns des autres" dans G . C'est le nombre cyclomatique de G .

DEFINITION Dans un graphe simple $G = (X,A)$, un *squelette* est un graphe partiel de G qui est une forêt ayant même nombre de composantes connexes que G .

DEFINITION Soit $T = (X,B)$ un squelette de $G = (X,A)$, alors le nombre $\chi(G) = |A| - |B|$ s'appelle le *nombre cyclomatique* de G .

REMARQUE Pour obtenir un squelette de G , il suffit d'enlever une arête sur un cycle simple de G , une arête sur un cycle simple du graphe partiel obtenu, etc.

PROPOSITION Si G a k composantes connexes, alors tout squelette T de G a $n - k$ arêtes où $n = \text{ord } G$.

Preuve: Soit $G_i = (X_i, A_i)$, $1 \leq i \leq k$, les k composantes connexes de G .

Soit $T = (X, B)$ un squelette de G , alors $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ où (X_i, B_i) est un arbre partiel de G_i . On a $|B| = |B_1| + \dots + |B_k| = (|X_1| - 1) + \dots + (|X_k| - 1) = n - k$.

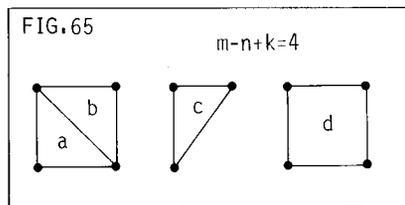
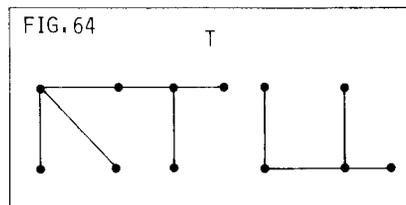
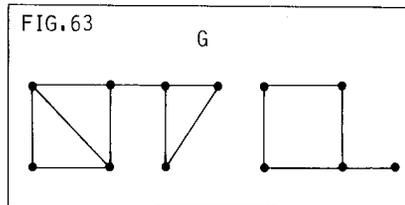
COROLLAIRE On a $\chi(G) = m - n + k$ où $n = \text{ord } G$, $m = |A|$ et k est le nombre de composantes connexes de G .

Preuve: $\chi(G) = |A| - |B|$ où $T = (X, B)$ est un squelette de $G = (X, A)$.
Donc $\chi(G) = m - (n - k) = m - n + k$.

DEFINITION Soit $T = (X, B)$ un squelette de $G = (X, A)$. Lorsqu'on ajoute à T une quelconque des $m - n + k$ arêtes de $A - B$, "un seul" cycle simple est formé. Ces $m - n + k$ cycles forment ce qu'on appelle le *système fondamental de cycles* associé à T .

REMARQUE Par abus de langage, on a appelé ici "cycle simple de G " un sous-graphe de G isomorphe à C_k , $k \geq 3$.

EXEMPLE Considérons le graphe simple G (fig. 63) d'ordre 12. La figure 64 en est un de ses nombreux squelettes. Le système fondamental de cycles associé à T est formé des quatre cycles a, b, c, d , de la figure 65.



EXERCICES

69. a. Montrer qu'un arbre est toujours un graphe biparti.
b. Trouver tous les arbres qui sont des graphes biparti complets.

77. Soit A un ensemble. Sur l'ensemble $\mathcal{P}(A)$, définissons l'opération *différence symétrique* Δ par:

$$S_1 \Delta S_2 = (S_1 \cup S_2) - (S_1 \cap S_2) = (S_1 - S_2) \cup (S_2 - S_1)$$

où $S_1 \in \mathcal{P}(A)$ et $S_2 \in \mathcal{P}(A)$. Vérifier que $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ est un groupe abélien tel que $\forall S \in \mathcal{P}(A)$, $S \Delta S = \emptyset$. Soit $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps à deux éléments, 0 et 1. Pour $S \in \mathcal{P}(A)$, on pose $0 \cdot S = \emptyset$ et $1 \cdot S = S$; vérifier que $\mathcal{P}(A)$ devient alors un espace vectoriel sur \mathbb{Z}_2 . De plus, si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, les m singletons $\{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_m\}$ forment une base de cet espace vectoriel.

- **78. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Comme précédemment, un "cycle de G " sera un sous-graphe de G isomorphe à C_k pour $k \geq 3$. Identifions un cycle de G à son ensemble d'arêtes pour en faire un élément de l'espace vectoriel $\mathcal{P}(A)$ (voir exercice 77). Soit V le sous-espace de $\mathcal{P}(A)$ engendré par les cycles de G . Vérifier que tout système fondamental de cycles, associé à un squelette de G , est une base de V . En conclure que le nombre cyclomatique $\chi(G)$ est la dimension de l'espace vectoriel $V \subseteq \mathcal{P}(A)$ engendré par les cycles de G .
- **79. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Soit W le sous-espace de $\mathcal{P}(A)$ engendré par les séparateurs de G . On veut dire ici par séparateur: ensemble d'arêtes de G dont la suppression augmente de un le nombre k de composantes connexes de G et qui est minimal par rapport à cette propriété. Soit T une forêt maximale de G . Pour toute arête a de T , le graphe simple $T - a$ a $k + 1$ composantes connexes, dont T_Y et T_Z où $Y \cup Z = X_i$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de G . Soit $S_a = \{\{y, z\} \in A \mid y \in Y \text{ et } z \in Z\}$. Vérifier que S_a est un séparateur de G . On appelle l'ensemble des S_a pour $a \in T$, le *système fondamental de séparateurs de G associé à la forêt T* . Vérifier que c'est une base du sous-espace vectoriel W . En conclure que W est de dimension $n - k = m - \chi(G)$.
80. Pour le graphe simple $C_4 \simeq B_2$ (appelé le *carré*), écrire les ensembles $\mathcal{P}(A)$, V et W . Constater que dans ce cas V est un sous-espace de W et que $\dim V = 1$ et $\dim W = 3$.

2

GRAPHES ORIENTÉS

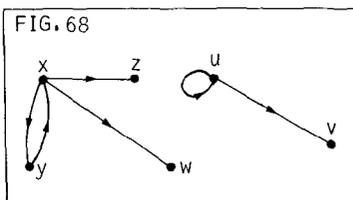
1 graphes orientés et fonctions multivoques

DEFINITION Un *graphe orienté*, $G = (X,U)$, est formé d'un ensemble fini non-vide X de *sommets* et d'un ensemble $U \subseteq X \times X$ de *flèches*.

DEFINITION Si $u = (x,y) \in U$, alors on dit que x est l'*extrémité initiale* de u et que y est l'*extrémité finale* de u . On dit aussi que u est la *flèche* (ou l'*arc*) de x à y .

Si $u = (x,x)$, on dit que u est la *boucle* en x .

On représente un graphe orienté par une figure dans le plan. Par exemple, la figure 68 représente le graphe orienté $G = (X,U)$ où $X = \{x,y,z,u,v,w\}$ et $U = \{(x,y), (y,x), (x,z), (u,u), (u,v), (x,w)\}$.



REMARQUE Un graphe orienté est donc formé d'un ensemble X (de sommets) muni d'une relation U sur X . Nous dirons que G est réflexif, symétrique ou transitif suivant que U est réflexive, symétrique ou transitive.

44 GRAPHES ORIENTÉS

DEFINITION Une fonction multivoque Γ sur X est une fonction de X dans $\mathcal{P}(X)$. A partir de $U \subseteq X \times X$, on définit une fonction multivoque Γ sur X , par $\Gamma(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in U\}$.

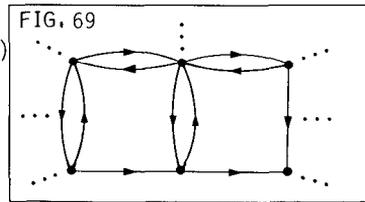
Inversement, une fonction multivoque $\Gamma: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ définit une relation U sur X où $U = \{(x,y) \mid y \in \Gamma(x)\} = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times \Gamma(x))$.

Un graphe orienté peut donc, de façon équivalente, se définir comme étant un ensemble de sommets X muni d'une fonction multivoque Γ sur X , donc $G = (X,U)$ ou $G = (X,\Gamma)$. Dans notre exemple (fig. 68), $\Gamma(x) = \{y,z,w\}$, $\Gamma(y) = \{x\}$, $\Gamma(u) = \{u,v\}$, $\Gamma(z) = \Gamma(v) = \Gamma(w) = \emptyset$.

EXEMPLE 1 Les résultats d'un tournoi de tennis (ou d'échecs):

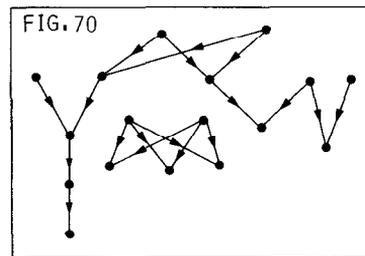
$$X = \{\text{participants}\}, \quad (x,y) \in U \text{ ssi } x \text{ a battu } y.$$

EXEMPLE 2 Les rues dans une ville :
(ainsi les "sens-uniques" sont indiqués)

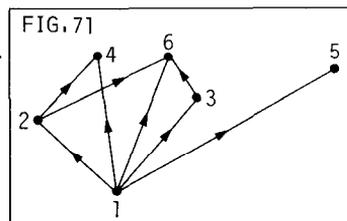


EXEMPLE 3 Liens de parenté dans un groupe de personnes:

X = ensemble de personnes,
 $(x,y) \in U$ ssi x est père (ou mère)
de y .

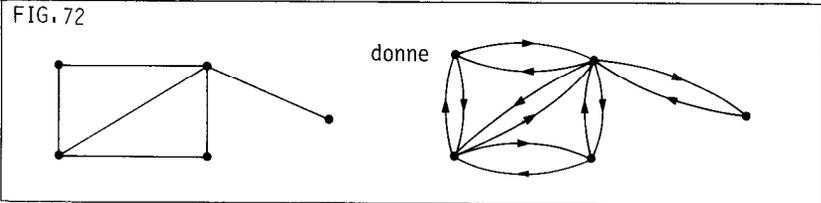


EXEMPLE 4 Soit X un ensemble d'entiers; posons $(k,\ell) \in U$ ssi k divise ℓ .
Par exemple, prenons $X = \{1,2,3,4,5,6\}$:



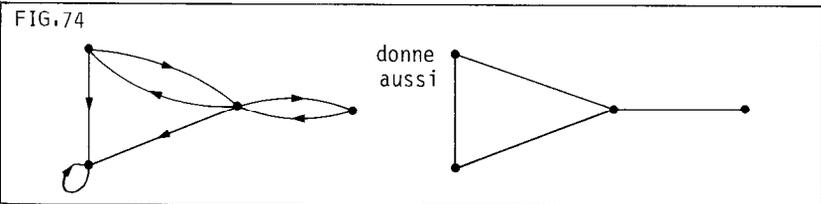
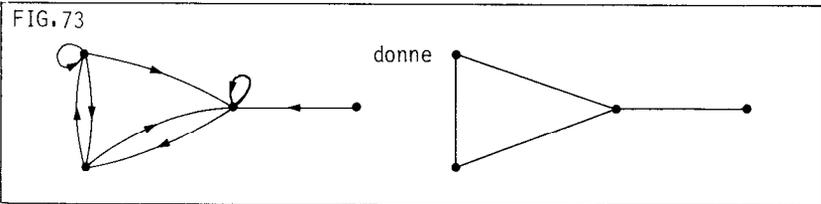
2 graphes simples et graphes orientés

Etant donné un graphe simple $G = (X,A)$, $A \subseteq \mathcal{P}_2(X)$, on lui associe un graphe orienté (X,U) où $(x,y) \in U \iff \{x,y\} \in A$, c.-à-d. où chaque arête $\{x,y\} \in A$ donne deux arcs (x,y) et (y,x) dans U . Par exemple:



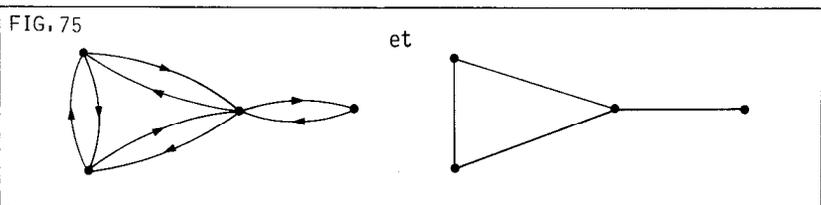
Le graphe orienté obtenu est alors symétrique et *anti-réflexif* c.-à-d. $\forall x, (x,x) \notin U$.

Inversement, à tout graphe orienté $G = (X,U)$, on associe un graphe simple (X,A) où $\{x,y\} \in A \iff x \neq y$ et $((x,y) \in U$ ou $(y,x) \in U)$. Par exemple:



Deux graphes orientés différents peuvent donner le même graphe simple, cependant cette association décrit une bijection entre les "graphes simples" et les "graphes orientés symétriques et sans boucle".

Par exemple:



3 terminologie des graphes orientés

Soit $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ un graphe orienté.

DEFINITION $|X|$ est l'ordre de G .

Les sommets x et y sont dits adjacents si $(x, y) \in U$ ou $(y, x) \in U$.

Le graphe orienté G est complet si

$\forall x, \forall y, (x \neq y) \Rightarrow ((x, y) \in U \text{ ou } (y, x) \in U)$.

On dit que (X, Δ) est un graphe partiel de G si $\forall x \in X, \Delta(x) \subseteq \Gamma(x)$.

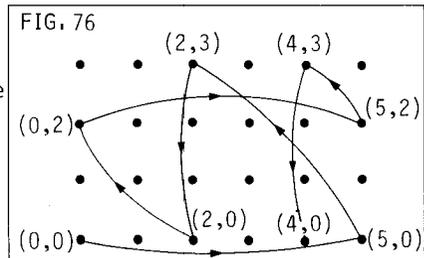
Un sous-graphe de G est un graphe orienté (Y, λ) où $Y \subseteq X$ et

$\lambda(y) \subseteq \Gamma(y), \forall y \in Y$.

Un chemin de G est une suite de sommets $c = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ de G telle que pour $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on ait $(x_i, x_{i+1}) \in U$. On dit que x_0 est l'extrémité initiale, x_n l'extrémité finale et n la longueur de c . Le chemin c est un circuit si $x_0 = x_n$. Le chemin c est dit élémentaire si les sommets x_i sont distincts sauf peut-être x_0 et x_n . Le chemin c est dit simple si les flèches $u_i = (x_i, x_{i+1})$ sont distinctes. Pour tout sommet x , on admet le chemin $c = [x]$ qui est un circuit, de x à x , de longueur zéro.

EXEMPLE Résoudre une énigme revient souvent à trouver un chemin entre deux sommets donnés d'un graphe orienté. Par exemple, supposons qu'un marchand a trois urnes respectivement de capacité 8, 5 et 3 litres. L'urne de 8 litres est pleine de vin et les deux autres sont vides. Il veut transvider exactement 4 litres dans l'urne de 5 litres mais ne dispose d'aucun moyen de mesurer. Pour être certain du contenu dans ses urnes, il doit donc, lorsqu'il transvide, soit remplir, soit vider complètement une urne. Considérons le graphe orienté dont

les sommets sont les points (x, y) du plan, où x est le contenu de l'urne 5 et y le contenu de l'urne 3, et où il y a une flèche de (x, y) à (x', y') si on peut passer de (x, y) à (x', y') en transvidant une fois. Par exemple, noter qu'

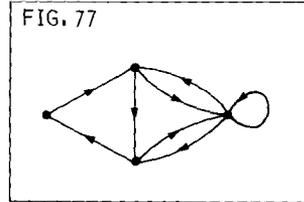


on a $((4,2), (3,3)) \in U$ mais que $((3,3), (4,2)) \notin U$. Résoudre cette énigme consiste à trouver un chemin du sommet $(0,0)$ au sommet $(4,0)$. La figure 76 en donne une solution.

DEFINITION G est *fortement connexe* si $\forall x, \forall y \in X$, il existe un chemin de x à y .

EXEMPLE Le graphe orienté de la figure 77 est fortement connexe.

FIG. 77

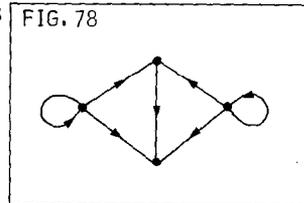


Dans un graphe orienté $G = (X, U)$, une *chaîne* de x à y , de longueur k , est une séquence de sommets $[x = x_0, x_1, \dots, x_k = y]$ telle que $\forall 0 \leq i < k, (x_i, x_{i+1}) \in U$ ou $(x_{i+1}, x_i) \in U$.

DEFINITION G est *connexe* si $\forall x, y \in X, \exists$ une chaîne de x à y .

EXEMPLE Le graphe orienté de la figure 78 est connexe mais n'est pas fortement connexe

FIG. 78



DEFINITION Soit $x \in X$ un sommet d'un graphe orienté $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ alors $d^+(x) = |\{y \mid (x, y) \in U\}| = |\Gamma(x)|$ est le *demi-degré extérieur* de x et $d^-(x) = |\{y \mid (y, x) \in U\}|$ est le *demi-degré intérieur* de x .

LEMME (des coups de pied). Dans tout graphe orienté $G = (X, U)$, on a $\sum_{x \in X} d^+(x) = \sum_{x \in X} d^-(x) = |U|$.

EXEMPLE Si, dans une réception, les invités se donnent des coups de pied (pas plus d'un à une même personne), alors le nombre de coups donnés est égal au nombre de coups reçus qui est égal au nombre de coups.

DEFINITION Soit $\Gamma : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ une fonction multivoque sur X . On définit la fonction multivoque Γ^{-1} (l'inverse de Γ) par: $\Gamma^{-1}(x) = \{y | x \in \Gamma(y)\}$. On définit la fonction multivoque $\bar{\Gamma}$ (complémentaire de Γ) par: $\bar{\Gamma}(x) = \text{complément de } \Gamma(x) \text{ dans } X = X - \Gamma(x)$.

Pour $A \subseteq X$, posons $\Gamma(A) = \bigcup_{x \in A} \Gamma(x)$. Le produit $\Gamma \circ \Delta$ de deux fonctions multivoques sur X est la fonction multivoque définie par: $(\Gamma \circ \Delta)(x) = \Gamma(\Delta(x))$.

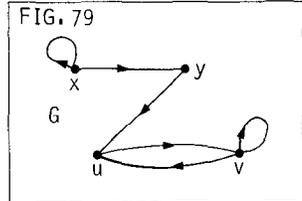
Les fonctions multivoques $\Gamma^2, \Gamma^3, \dots, \Gamma^n$ sont donc bien définies.

La fermeture transitive $\hat{\Gamma}$ de Γ est la fonction multivoque définie par: $\hat{\Gamma}(x) = \{x\} \cup \Gamma(x) \cup \Gamma^2(x) \cup \dots$

DEFINITION Soit $G = (X, \Gamma)$ un graphe orienté, alors

- $G^{-1} = (X, \Gamma^{-1})$ est le graphe inverse,
- $\bar{G} = (X, \bar{\Gamma})$ est le graphe complémentaire,
- $\hat{G} = (X, \hat{\Gamma})$ est la fermeture transitive de G .

EXEMPLE Considérons le graphe orienté (fig. 79) où $X = \{x, y, u, v\}$ et $U = \{(x, x), (x, y), (y, u), (v, u), (u, v), (v, v)\}$.



On a $\Gamma(x) = \{x, y\}, \Gamma(y) = \{u\}, \Gamma(u) = \{v\}, \Gamma(v) = \{u, v\},$

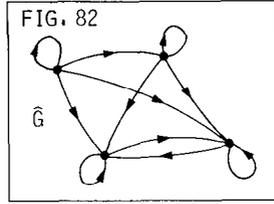
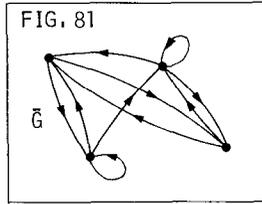
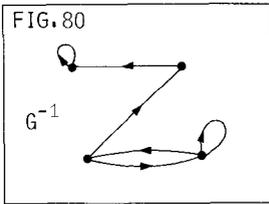
$$d^+(x) = d^+(v) = 2, d^+(y) = d^+(u) = 1, \sum_{s \in X} d^+(s) = 6 = |U|,$$

$$d^-(x) = d^-(y) = 1, d^-(u) = d^-(v) = 2, \sum_{s \in X} d^-(s) = 6,$$

$$\Gamma^{-1}(x) = \{x\}, \Gamma^{-1}(y) = \{x\}, \Gamma^{-1}(u) = \{y, v\}, \Gamma^{-1}(v) = \{u, v\},$$

$\Gamma^0(x) = \{x\}$	$\Gamma^0(y) = \{y\}$	$\Gamma^0(u) = \{u\}$	$\Gamma^0(v) = \{v\}$
$\Gamma(x) = \{x, y\}$	$\Gamma(y) = \{u\}$	$\Gamma(u) = \{v\}$	$\Gamma(v) = \{u, v\}$
$\Gamma^2(x) = \{x, y, u\}$	$\Gamma^2(y) = \{v\}$	$\Gamma^2(u) = \{u, v\}$	$\Gamma^2(v) = \{u, v\}$
$\Gamma^3(x) = X$	$\Gamma^3(y) = \{u, v\}$	$\Gamma^3(u) = \{u, v\}$	⋮
$\Gamma^4(x) = X$	$\Gamma^4(y) = \{u, v\}$	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
$\hat{\Gamma}(x) = X$	$\hat{\Gamma}(y) = \{y, u, v\}$	$\hat{\Gamma}(u) = \{u, v\}$	$\hat{\Gamma}(v) = \{u, v\}$

De plus G^{-1} , \bar{G} et \hat{G} sont donnés par les figures 80, 81 et 82 respectivement.



EXERCICES

81 Vérifier que le graphe orienté $G = (X, U) = (X, \Gamma)$

a. est symétrique si et seulement si $G = G^{-1}$,

b. est transitif et réflexif si et seulement si $G = \hat{G}$,

c. est fortement connexe si et seulement si $\hat{G} = (X, X \times X)$.

*82 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté complet. Prouver qu'il existe dans G un chemin élémentaire passant une et une seule fois par chaque sommet.

83 Prouver qu'un graphe orienté est connexe si et seulement si le graphe simple associé est connexe.

84 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple où $|X| = n$ et $|A| = m$. Montrer qu'il y a exactement $2^n \cdot 3^m$ graphes orientés dont le graphe simple associé, soit G . Ecrire les 72 graphes orientés ayant  comme graphe simple associé.

85 Trouver une bonne condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe orienté connexe admette un circuit passant par chacune des flèches une et une seule fois.

4 matrices d'adjacence

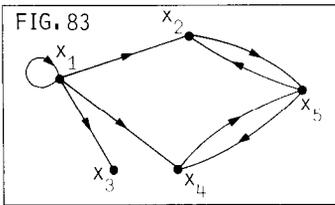
Soit $G = (X, U)$ où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, c.-à-d. que G est un graphe orienté dont les sommets ont été numérotés de 1 à n .

La matrice d'adjacence de G est la matrice $n \times n$,

$$M(G) = (m_{ij}) \quad \text{où } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Evidemment, $M(G)$ dépend de G et de la numérotation de ses sommets.

EXEMPLE



$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Voici quelques propriétés évidentes de la matrice d'adjacence:

a) $\forall i, d^+(x_i) = \sum_{j=1}^n m_{ij} =$ somme de la $i^{\text{ième}}$ ligne

$$d^-(x_i) = \sum_{j=1}^n m_{ji} =$$
 somme de la $i^{\text{ième}}$ colonne.

b) $\sum_{i,j} m_{ij} = \sum_{i=1}^n d^+(x_i) = \sum_{i=1}^n d^-(x_i) = |U|.$

c) G est symétrique $\iff M(G)$ est une matrice symétrique ($\forall i,j, m_{ij} = m_{ji}$).

d) Le nombre de boucles de G est la trace de $M(G)$ (notée $\text{tr}M(G)$).

e) $M(G^{-1}) = M(G)^t =$ transposée de la matrice $M(G)$.

f) $M(\bar{G}) = E - M(G)$ où $E = (\epsilon_{ij}), \epsilon_{ij} = 1, \forall i, \forall j.$

THEOREME Considérons un graphe orienté $G = (X, U)$ où

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et soit $M = M(G)$ sa matrice d'adjacence. Si $M^k = M \times M \times \dots \times M = (m_{ij}^{(k)})$, $k > 1$, alors $m_{ij}^{(k)}$ est le nombre de chemins de longueur k du sommet x_i au sommet x_j dans G.

Preuve. Par récurrence. Pour $k = 1, m_{ij}^{(1)} = m_{ij}$ est bien le nombre de chemins de longueur 1 de x_i à x_j . Supposons l'énoncé vrai pour $k - 1$. Comme $M^k = M^{k-1} \times M$, on a alors

$$m_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^n m_{i\ell}^{(k-1)} \cdot m_{\ell j}.$$

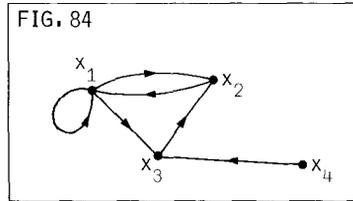
Or $m_{i\ell}^{(k-1)}$ est le nombre de chemins de longueur $k - 1$ de x_i à x_ℓ

$$\text{et } m_{\ell j} = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_\ell, x_j) \notin U \\ 1 & \text{si } (x_\ell, x_j) \in U. \end{cases}$$

On a donc $m_{ij}^{(k)} = \sum_{\ell=1}^n$ (nombre de chemins de longueur k de x_i à x_j et se terminant par (x_ℓ, x_j)).

= nombre de chemins de longueur k de x_i à x_j

EXEMPLE Considérons le graphe orienté de la figure 84:

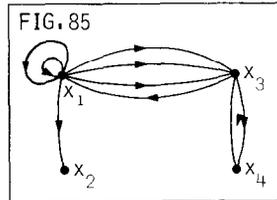


$$\text{On a } M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Par exemple, $m_{12}^{(3)} = 3$ nous dit qu'il y a 3 chemins de longueur 3 de x_1 à x_2 . Ce sont $[x_1, x_1, x_1, x_2]$, $[x_1, x_2, x_1, x_2]$ et $[x_1, x_1, x_3, x_2]$.

Abstraitement, on peut dire que l'étude des graphes orientés revient à l'étude des matrices avec des 0 et des 1.

Définissons un *multigraphe orienté* comme un couple (X, U) où U est une famille d'éléments de $X \times X$. Par exemple, le multigraphe orienté représenté par la figure 85.



La matrice d'adjacence du multigraphe orienté G prend alors ses valeurs dans $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$. Il est facile de voir que $m_{ij}^{(k)}$ est encore le nombre de chemins de longueur k de x_i à x_j .

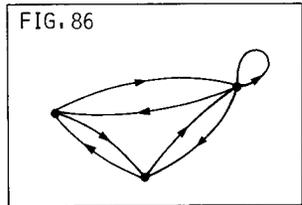
$$\text{Dans l'exemple précédent, } M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^3 = \begin{bmatrix} 20 & 7 & 21 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

il y a, par exemple, 21 chemins de longueur 3 de x_1 à x_3 .

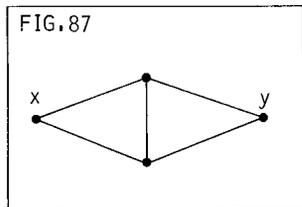
REMARQUE Lorsque $G = (X,A)$ est un graphe simple où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la matrice d'adjacence de G est la matrice d'adjacence du graphe orienté (symétrique et sans boucle) G' associé à G . Cette matrice M est, bien sûr, symétrique. De plus les entrées de M^k comptent le nombre de chaînes de longueur k dans G . En effet, il y a coïncidence entre les suites de sommets qui sont des chaînes de G et celles qui sont les chemins de G' .

EXERCICES

- 86 Trouver le nombre de circuits de longueur 4 dans le graphe orienté ci-contre:



- 87 Trouver le nombre de chaînes de longueur 5 de x à y dans le graphe simple ci-contre:



- 88 Soit $G = (X,U)$ un graphe orienté où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et M sa matrice d'adjacence. Montrer que G n'a pas de circuit de longueur > 0 si et seulement si M est nilpotente, c.-à-d. $\exists k > 0$ tel que $M^k = 0$.
- 89 Dans un graphe simple $G = (X,A)$ un triangle est un sous-graphe d'ordre 3 isomorphe à K_3 . Soit M la matrice d'adjacence de G , montrer que $\frac{1}{6} \text{tr } M^3$ donne le nombre de triangles de G .
- 90 Soit $G = (X,U)$ un graphe orienté où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $M = M(G)$ sa matrice d'adjacence. Soit $C = (c_{ij})$ la matrice $I + M + M^2 + \dots + M^{n-1}$ et $R = (r_{ij})$ la matrice définie par $r_{ij} = 1$ si $c_{ij} > 0$ et $r_{ij} = 0$ si $c_{ij} = 0$. Montrer que $R = M(\bar{G})$. Ici $I = (\delta_{ij})$ est la matrice identité, c.-à-d. où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

5 distance

Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté.

Pour $x, y \in X$, posons $d(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{si il n'y a pas de chemin de } x \text{ à } y \\ \min\{\ell(c) \mid c \text{ est un chemin de } x \text{ à } y\} & \text{autrement.} \end{cases}$

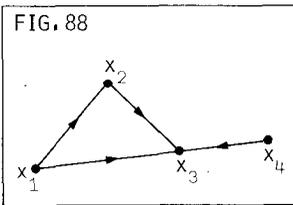
Soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $M = (m_{ij})$, la matrice d'adjacence de G :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in U \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin U. \end{cases}$$

Définissons la *matrice des distances*, $D = (d_{ij})$, par:

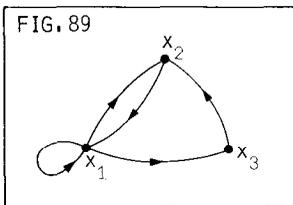
$$d_{ij} = d(x_i, x_j).$$

EXEMPLE 1



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

EXEMPLE 2



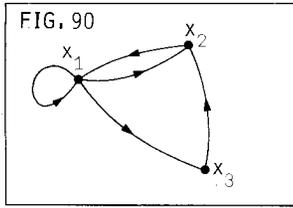
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les propositions suivantes permettent de calculer D en fonction de M .

PROPOSITION Soit G un graphe orienté où $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pour $i \neq j$, si $\{k \mid 0 < k < n \text{ et } m_{ij}^{(k)} > 0\} = \emptyset$, on a $d_{ij} = \infty$, et, dans le cas contraire, $d_{ij} = \min \{k \mid 0 < k < n \text{ et } m_{ij}^{(k)} > 0\}$. De plus, on a $d_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Preuve. Il suffit de remarquer que s'il existe un chemin de x_i à x_j , alors il existe un chemin de x_i à x_j de longueur k où $0 < k < n$ et alors $m_{ij}^{(k)} > 0$.

EXEMPLE



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

DEFINITION Les opérations semi-booléennes sur $\{0,1\}$ sont \oplus et $*$ définies par: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 1$, (soit $a \oplus b = \max \{a,b\}$); $0 * 0 = 0 * 1 = 1 * 0 = 0$, $1 * 1 = 1$, (soit $a * b = a \cdot b$).

Notons $M^{[k]}$ la matrice $M \bullet M \bullet \dots \bullet M$, calculée avec \oplus et $*$ au lieu

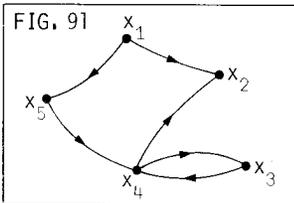
k

de $+$ et \cdot , et posons $M^{[k]} = (m_{ij}^{[k]})$.

PROPOSITION Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté $G = (X,U)$ où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors $d_{ii} = 0$, et pour $i \neq j$,
 $d_{ij} = \infty$ si $\{k \mid 0 < k < n \text{ et } m_{ij}^{[k]} = 1\} = \emptyset$, et, dans le cas contraire,
 $d_{ij} = \min \{k \mid 0 < k < n, m_{ij}^{[k]} = 1\}$.

Preuve. $m_{ij}^{[k]} = 1$ ssi il existe un chemin de longueur k de x_i à x_j
 ssi $m_{ij}^{(k)} > 0$.

EXEMPLE



$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 2 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & 1 & 1 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

car

$$M^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^{[3]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^{[4]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les deux propositions précédentes permettent de calculer la matrice des distances mais exigent en général beaucoup trop d'opérations, c.-à-d. de temps machine. L'algorithme de Moore qui suit n'a pas ce désavantage.

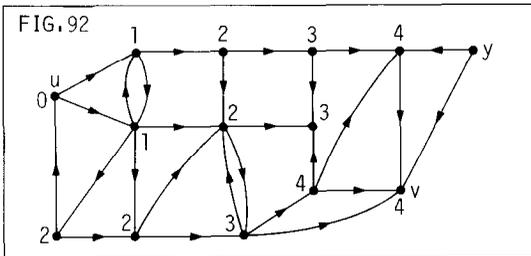
ALGORITHME DE MOORE Soit u et v deux sommets de G ; cherchons $d(u,v)$. On étiquette les sommets de X en observant les trois règles suivantes aussi longtemps que possible:

- I u reçoit l'étiquette 0.
- II Soit $(x,y) \in U$ et x étiqueté $k \geq 0$, si y n'a pas d'étiquette alors y reçoit l'étiquette $k + 1$.
- III Soit $(x,y) \in U$, x étiqueté $k \geq 0$ et y étiqueté l , alors l'étiquette de y est remplacée par $k + 1$ si $k + 1 < l$, sinon y conserve son étiquette.

Si, à la fin, v n'a pas d'étiquette, alors $d(u,v) = \infty$; si v a l'étiquette k , alors $d(u,v) = k$.

On trouve aussi $\forall x, d(u,x) = \begin{cases} \text{étiquette de } x & \text{si } x \text{ est étiqueté,} \\ \infty & \text{si } x \text{ n'est pas étiqueté.} \end{cases}$

EXEMPLE



$d(u,v) = 4$
 $d(u,y) = \infty$.

REMARQUE En langage plus informatisé, l'algorithme de Moore peut s'écrire ainsi:

soit $G = (X, \Gamma)$ et $u \in X$;

I posons $X(0) = \{u\}$,

II pour $m > 0$, posons $X(m) = \Gamma(X(m-1)) - \bigcup_{k < m} X(k)$;

III "stop" si $X(m) = \emptyset$.

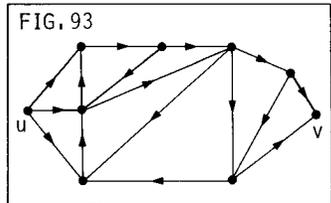
On a alors $d(u, x) = k \iff x \in X(k)$.

REMARQUE Si $d(u, v) = \ell$, alors on trouve, de façon récursive, les chemins de longueur ℓ de u à v en trouvant les sommets w tels que $d(u, w) = \ell - 1$ et $(w, v) \in U$.

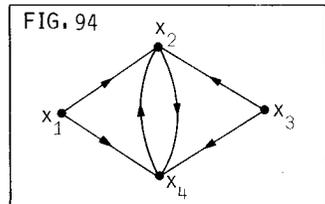
EXERCICES

91 Trouver la matrice des distances pour les graphes simples suivants:
 a. D_5 b. K_5 c. C_5 d. R_5 e. E_5

92 Appliquer l'algorithme de Moore pour trouver la distance entre u et v dans le graphe orienté suivant:



93 A l'aide de la matrice d'adjacence, trouver la matrice des distances du graphe orienté suivant:



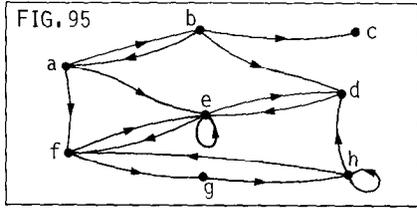
6 nombres associés à un graphe orienté

Soit $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ un graphe orienté.

DEFINITION Un sous-ensemble S de X est dit *intérieurement stable* si $S \cap \Gamma(S) = \emptyset$, c.-à-d. si deux sommets dans S ne sont jamais adjacents. On dit aussi que S est un ensemble *indépendant* de sommets.

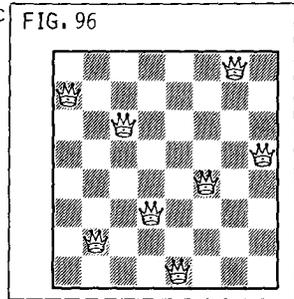
DEFINITION Le *nombre de stabilité interne* $\alpha(G)$ d'un graphe orienté G est le nombre d'éléments du plus grand ensemble intérieurement stable de G , en d'autres mots $\alpha(G) = \max_{S \in \Sigma} |S|$ où $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$ est la classe des sous-ensembles intérieurement stables de G .

EXEMPLE 1 Considérons le graphe orienté G de la figure 95. Les ensembles $\{a,d,g\}$, $\{d,g\}$, $\{d\}$ et $\{a,c,d,g\}$ sont intérieurement stables tandis que $\{e\}$, $\{f,g,b\}$ et $\{a,c,h\}$ ne le sont pas. Noter que dans ce cas, $\alpha(G) = 4$ et que $\{a,c,d,g\}$ est un ensemble intérieurement stable maximum, c.-à-d. ayant un nombre maximum d'éléments.



EXEMPLE 2 Soit \mathcal{D}_8 le graphe orienté (symétrique sans boucle) du mouvement d'une dame sur un échiquier. Par définition, $S \subseteq X$ est intérieurement stable ssi lorsqu'on place des dames sur les cases de S , aucune dame n'est "en prise". Il est clair que $\alpha(\mathcal{D}_8) \leq 8$ car aucun sous-ensemble $S \subseteq X$, tel que $|S| > 8$, n'est intérieurement stable. En effet, $|S| > 8 \Rightarrow$ il existe deux cases $c_1, c_2 \in S$ qui soient sur une même colonne $\Rightarrow S$ n'est pas intérieurement stable.

La figure 96 montre que $\alpha(\mathcal{D}_8) \geq 8$. On a donc $\alpha(\mathcal{D}_8) = 8$. Il est bien connu que \mathcal{D}_8 admet exactement 92 sous-ensembles intérieurement stables maximaux de 8 éléments. En 1969, il a été prouvé que $\forall k \geq 4, \alpha(\mathcal{D}_k) = k$ où \mathcal{D}_k désigne le graphe orienté des mouvements d'une dame sur un "échiquier" k par k . (11) page 261)



EXEMPLE 3 Pour le graphe orienté \mathcal{T}_8 du mouvement d'une tour, il est facile de voir que $\alpha(\mathcal{T}_8) = 8$.

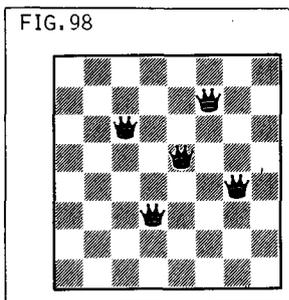
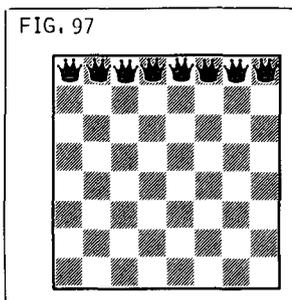
EXEMPLE 4 Considérons le graphe orienté C_8 du mouvement d'un cavalier. Puisqu'un cavalier sur une case blanche n'attaque que des cases noires (et réciproquement), il est clair que {cases blanches} et {cases noires} sont des ensembles intérieurement stables de cardinalité 32. Il est facile de voir que $\alpha(C_8) = 32$.

DEFINITION On dit qu'un sous-ensemble T de X est absorbant (ou extérieurement stable) si $\forall x \notin T, \exists y \in T$ tel que $y \in \Gamma(x)$. En d'autres mots, $\forall x \notin T, \exists$ un arc de x à un sommet dans T , d'où le mot absorbant.

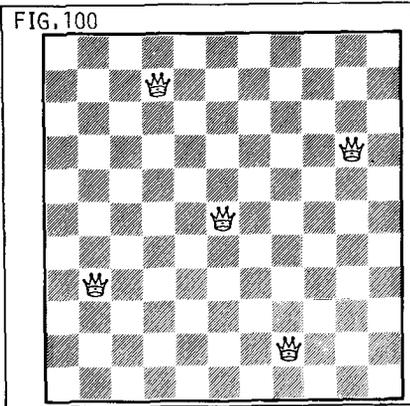
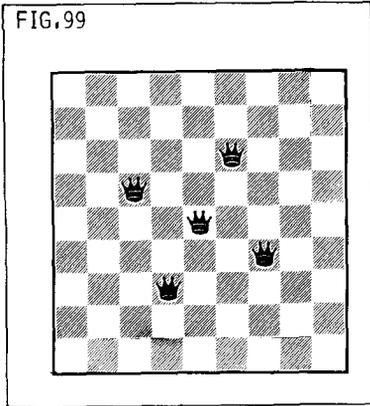
DEFINITION Le nombre d'absorption de G (ou nombre de stabilité externe), $\beta(G)$, est le nombre d'éléments du plus petit sous-ensemble absorbant de G , c.-à-d. $\beta(G) = \min_{T \in A} |T|$ où $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ est la classe des sous-ensembles absorbants de G .

EXEMPLE 1 Pour le graphe orienté G de la figure 95, on a $\beta(G) = 3$ et $\{c, e, h\}$ est un ensemble extérieurement stable minimum, c.-à-d. ayant un nombre minimum d'éléments.

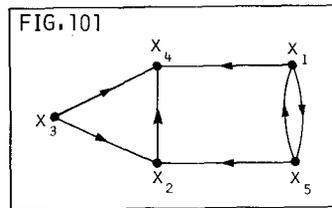
EXEMPLE 2 Dans le graphe orienté D_8 du mouvement d'une dame, les ensembles décrits par les figures 97 et 98 sont extérieurement stables. Ici $T \subseteq X$ est absorbant si des dames placées sur les cases de T attaquent toutes les cases vides.



Par inspection, on trouve que $\beta(D_8) = 5$ (fig. 98). De plus, noter que $\beta(D_9) = \beta(D_{11}) = 5$ comme le montrent les figures 99 et 100. En d'autres mots, cinq dames suffisent à contrôler non seulement un échiquier 8 par 8 mais également des échiquiers 9 par 9, 10 par 10 ou même 11 par 11.



EXEMPLE 3 Considérons des points "stratégiques" et plaçons l'arc (x,y) si de y on peut "surveiller" x . L'ensemble $T \subseteq X$ est alors absorbant si, à partir des sommets de T , on peut surveiller tous les autres points stratégiques. Par exemple, dans la figure 101, il y a 5 points stratégiques.



Il est souvent utile de construire le moins possible de postes d'observation tout en pouvant surveiller l'ensemble, c.-à-d. qu'il faut trouver un sous-ensemble absorbant minimum. Dans la figure 101, $\{x_2, x_4\}$ est un tel sous-ensemble.

DEFINITION Un *noyau* d'un graphe orienté $G = (X, \Gamma)$ est un sous-ensemble de X qui est à la fois intérieurement et extérieurement stable, c.-à-d. que $N \subseteq X$ est un noyau si $\forall x \in N, N \cap \Gamma(x) = \emptyset$ et $\forall x \notin N, N \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$.

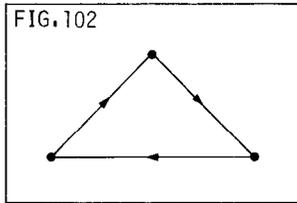
REMARQUE Un graphe orienté n'a pas toujours un noyau.

EXEMPLE 1 Dans le graphe orienté de la figure 95, l'ensemble $\{a, c, d, g\}$ est un noyau.

60 **GRAPHES ORIENTÉS**

EXEMPLE 2 Dans \mathcal{D}_8 , les ensembles décrits par les figures 96 et 98 sont des noyaux de cardinalité 8 et 5.

EXEMPLE 3 Le graphe orienté de la figure 102 n'admet aucun noyau.



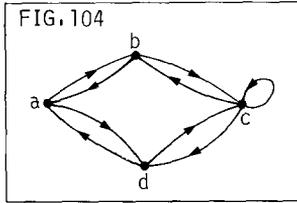
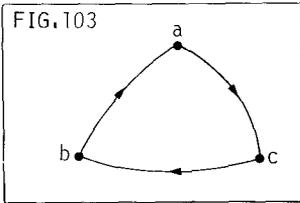
EXEMPLE 4 Soit $R \subseteq X \times X$ une relation d'équivalence sur X . Considérons le graphe orienté $G = (X, U)$ où $U = R - \Delta_X$ et $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$. L'ensemble $S \subseteq X$ est intérieurement stable dans G ssi S contient au plus un élément dans chacune des classes d'équivalence de R ; l'ensemble $T \subseteq X$ est extérieurement stable dans G ssi T contient au moins un élément dans chacune des classes d'équivalence de R ; on en déduit que $N \subseteq X$ est un noyau de G ssi N contient exactement un élément dans chacune des classes de R , c.-à-d. ssi N est un système de représentants de R . Dans ce cas, on a donc $\alpha(G) = \beta(G) = |N| = |X/R|$ où X/R est l'ensemble quotient de X par R , c.-à-d. l'ensemble des classes d'équivalence de R .

PROPOSITION Si $N \subseteq X$ est un noyau du graphe orienté $G = (X, U)$, alors N est un élément maximal de Σ (pour l'inclusion) et un élément minimal de A .

Preuve. On doit d'abord montrer que N n'est pas un sous-ensemble strict d'un ensemble intérieurement stable S . En fait, si $N \subset S$ et $x \in S - N$, alors comme N est également extérieurement stable, on a $N \cap \Gamma(x) \neq \emptyset$. L'ensemble S ne peut donc pas être intérieurement stable. En d'autres mots, $N \in \Sigma$ est tel que $\nexists S \in \Sigma$ avec $N \subset S$, c.-à-d. que N est un élément maximal de Σ pour l'inclusion. De façon similaire, si $T \subset N$ et $x \in N - T$ alors, comme N est intérieurement stable, on a $\Gamma(x) \cap N = \emptyset$ et $T \not\subseteq A$, c.-à-d. que N est un élément minimal de A pour l'inclusion.

REMARQUE 1 Dans le graphe orienté (non symétrique) de la figure 103,

l'ensemble $\{a\}$ est un élément maximal de Σ qui n'est pas un noyau. De plus $\{a,b,d\}$ est un élément minimal de A qui n'est pas non plus un noyau.



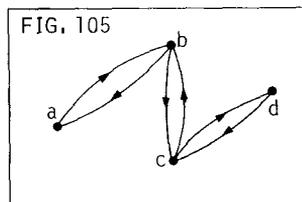
REMARQUE 2 Dans le graphe orienté (avec boucle) de la figure 104, $\{a\}$ et $\{b,d\}$ sont les éléments maximaux de Σ mais seul $\{b,d\}$ est un noyau. De plus $\{a,c\}$ est un élément minimal de A qui n'est pas un noyau.

Pour les graphes orientés symétriques et sans boucle (c.-à-d. les graphes simples), la réciproque de la proposition précédente est vraie.

PROPOSITION Soit $G = (X,U)$ un graphe orienté symétrique et sans boucle et N un élément maximal de Σ , alors N est un noyau.

Preuve. Si $N = X$, alors G est discret et N est bien un noyau. Supposons donc $N \subset X$, et soit $x \notin N$. L'ensemble $N \cup \{x\}$ n'est pas intérieurement stable puisque N est maximal. Comme $(x,x) \notin U$ et $(s_1,s_2) \notin U$ pour $s_1, s_2 \in N$, on a $(x,s) \in U$ ou $(s,x) \in U$ pour un $s \in N$. Comme G est symétrique, on a donc $(x,s) \in U$ pour un $s \in N$, c.-à-d. $\Gamma(x) \cap N \neq \emptyset$. L'élément $x \notin N$ étant arbitraire, ceci montre que N est absorbant; N est donc un noyau.

REMARQUE Dans le graphe orienté de la figure 105, l'ensemble $\{b,c\}$ est un élément minimal de A qui n'est pas un noyau.



DEFINITION On appelle *nombre chromatique* d'un graphe simple $G = (X,A)$ le plus petit nombre de couleurs avec lesquelles il est pos-

sible de colorier les sommets de G de telle sorte que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur. On le désigne par $\gamma(G)$.

REMARQUE Une telle coloration des sommets avec k couleurs donne une partition de X en k sous-ensembles intérieurement stables S_1, S_2, \dots, S_k où $S_i = \{\text{sommets de la } i^{\text{ème}} \text{ couleur}\}$. On peut donc de façon équivalente définir $\gamma(G)$ comme étant le plus petit entier k pour lequel il existe une partition de X en k sous-ensembles intérieurement stables.

DEFINITION L'indice chromatique, $\alpha(G)$, d'un graphe simple $G = (X, A)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour colorier les arêtes de G de sorte que deux arêtes adjacentes, c.-à-d. ayant une extrémité commune, soient de couleur différente. En d'autres mots, on a $\alpha(G) = \gamma(G^*)$ où G^* est le graphe-arête de G (page 12).

EXEMPLE 1 Les figures 106, 107 et 108 devraient facilement convaincre le lecteur que $\gamma(C_8) = 2$, $\gamma(T_8) = 8$ et $\gamma(F_8) = 8$.

FIG.106

1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1
1	2	1	2	1	2	1	2
2	1	2	1	2	1	2	1

FIG.107

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

FIG.108

1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	4	5	6	7	8

EXEMPLE 2 Soit $G = (X, A)$ le graphe simple où X est l'ensemble des stations radiophoniques du Québec et $\{x, y\} \in A$ si et seulement si les stations x et y ne peuvent pas émettre sur la même longueur d'onde sans créer d'interférence. Supposons qu'on dispose de k longueurs d'onde. Il n'est alors possible d'attribuer de bonnes longueurs aux stations que si et seulement si $k \geq \gamma(G)$.

EXEMPLE 3 Soit c une carte géographique dont les pays sont connexes. Nous associons à c un graphe simple $G_c = (X, A)$ où $X = \{\text{pays}\}$ et $\{x, y\} \in A$ ssi x et y ont une frontière commune. La célèbre "conjec-

ture" des quatre couleurs (devenue théorème en 1979) est que $\forall c$, $\gamma(G_C) \leq 4$, c.-à-d. que 4 couleurs suffisent (voir REMARQUE p. 101).

EXEMPLE 4 Le problème des horaires d'examens. Imaginons le Collège de Duhamel lors de sa prochaine série d'examens. Soit $X = \{\text{examens}\}$ et $Y = \{\text{étudiants}\}$. Définissons la fonction multivoque $\Gamma: X \rightarrow Y$ par $\Gamma(x) = \{y \mid y \text{ doit se présenter à l'examen } x\}$. Considérons le graphe simple $G = (X, A)$ où $\{x, x'\} \in A$ ssi $x \neq x'$ et $\Gamma(x) \cap \Gamma(x') \neq \emptyset$, c.-à-d. les examens x et x' sont adjacents ssi il y a au moins un étudiant qui doit se présenter aux deux. Comme il est inhumain de passer deux examens une même journée, cherchons à choisir une journée pour chaque examen mais de sorte que $\{x, x'\} \in A \Rightarrow x$ et x' ne soient pas le même jour. Dans ce cas, $\gamma(G) = k$ nous dit que la série d'examens devra durer au moins k jours. Si les examens sont d'une durée de 3 heures et que l'on se contente d'un horaire où un même étudiant n'a pas deux examens simultanément, alors la série d'examens pourra ne durer que $3k$ heures!

REMARQUE Le nombre chromatique n'a été défini que pour les graphes simples. Pour un graphe orienté G , il est naturel de poser $\gamma(G) = \gamma(G')$ où G' est le graphe simple associé à G (chapitre 2, §2). De même, les nombres de stabilité interne et externe n'ont été définis que pour les graphes orientés. Bien sûr, pour un graphe simple G , $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ sont définis en pensant à G comme étant un graphe orienté symétrique sans boucle.

Voici deux inégalités liant les nombres $\alpha(G)$ et $\gamma(G)$.

PROPOSITION Soit G un graphe simple d'ordre n , alors

$$\gamma(G) \cdot \alpha(G) \geq n \quad \text{et} \quad \gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Preuve. Soit $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ une partition de X en ensembles intérieurement stables où $k = \gamma(G)$, c.-à-d. que cette partition est une k -coloration de G .

$$\text{On a } n = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_k| \leq \underbrace{\alpha(G) + \alpha(G) + \dots + \alpha(G)}_{k = \gamma(G)} = \gamma(G) \cdot \alpha(G).$$

Soit $S \subseteq X$ un ensemble intérieurement stable tel que $|S| = \alpha(G)$. Colo-

64 GRAPHS ORIENTÉS

rions les sommets de S d'une même couleur et les autres sommets (il y en a $n - |S|$) de couleurs toutes différentes. On obtient une coloration de G avec $1 + (n - \alpha(G))$ couleurs. D'où $1 + n - \alpha(G) \geq \gamma(G)$, c.-à-d. $\gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1$.

EXERCICES

94 Trouver, en fonction de n , la valeur des nombres

$$\alpha(D_n), \beta(D_n), \gamma(D_n), \alpha(K_n), \beta(K_n), \gamma(K_n).$$

95 Trouver $\alpha(R_8)$, $\beta(R_8)$ et $\gamma(R_8)$ où R_8 est le graphe du mouvement du roi.

96 Trouver, en fonction de n , la valeur des nombres

$$\alpha(C_n), \beta(C_n), \gamma(C_n), \alpha(R_n), \beta(R_n), \gamma(R_n).$$

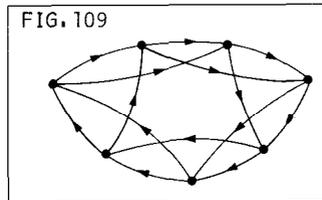
97 Trouver tous les graphes simples $G = (X,A)$ pour lesquels

$$\gamma(G) + \alpha(G) = \gamma(G)\alpha(G) + 1.$$

98 Trouver, en fonction de k et ℓ , la valeur des nombres

$$\gamma(K_{k,\ell}), q(K_{k,\ell}).$$

99 Vérifier que le graphe orienté suivant n'a pas de noyau mais que l'élimination d'un sommet quelconque donne un graphe orienté avec noyau:



*100 Montrer que $\gamma(D_8) = 9$.

101 Soit E un ensemble à n éléments. Posons $G = (X,A)$ où $X = \mathcal{P}(E)$ et $\{S,T\} \in A$ ssi $S, T \in \mathcal{P}(E)$, $S \neq T$ et $|S| = |T|$. Quelle est la cardinalité d'un noyau? Combien de noyaux le graphe simple G admet-il?

102 Montrer qu'une carte obtenue en traçant un nombre fini de cercles dans le plan peut toujours être coloriée avec deux couleurs.

- 103 Montrer que pour le graphe de Petersen, $q(G) = 4$.
- 104 Soit G un graphe simple, prouver que :
- $\gamma(G) = 1$ ssi G est discret,
 - $\gamma(G) = 2$ ssi G est biparti et non discret.

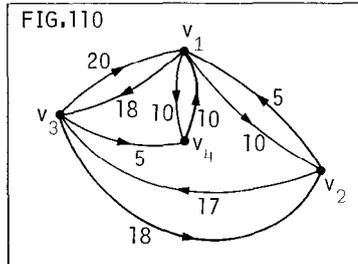
3

GRAPHES VALUÉS

1 définition, chemin minimum

DEFINITION Un *graphe valué* est un graphe orienté, $G = (X,U)$, muni d'une fonction $\gamma: U \rightarrow \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$. La fonction γ est souvent appelée *fonction de coût*.

EXEMPLE Dans la figure 110, les sommets sont des villes, les flèches sont les vols possibles entre ces villes et $\gamma(u)$ est le coût du vol u .



DEFINITION Le *coût du chemin* $\alpha = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ est la somme des coûts des arcs de ce chemin; $\gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^k \gamma(u_i)$ où $u_i = (x_{i-1}, x_i)$. Si $x \in X$ et $c = [x]$ est le circuit de longueur zéro en x alors $\gamma(c) = 0$.

DEFINITION Un *chemin minimum* de x à y est un chemin α , de x à y , tel que $\gamma(\alpha)$ soit minimum: $\gamma(\alpha) = \min\{\gamma(\beta) \mid \beta \text{ est un chemin de } x \text{ à } y\}$.

DEFINITION Dans un graphe valué $G = (X, U, \gamma)$, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la *matrice des valeurs* (ou des coûts) est la matrice, $C = (c_{ij})$, où

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \notin U \\ \gamma(x_i, x_j) & \text{si } i \neq j \text{ et } (x_i, x_j) \in U. \end{cases}$$

DEFINITION La *matrice de coût minimum*, $M = (m_{ij})$, est définie par

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } \{c \mid c \text{ chemin de } x_i \text{ à } x_j\} = \emptyset \\ \min \{\gamma(c) \mid c \text{ chemin de } x_i \text{ à } x_j\} & \text{autrement.} \end{cases}$$

REMARQUE Etant donné un graphe orienté $G = (X, U)$, on peut en faire un graphe valué en posant $\gamma(u) = 1, \forall u \in U$. Le coût d'un chemin est alors sa longueur et la matrice des coûts minimums est la matrice des distances.

EXERCICES

105 Considérons le graphe valué $G = (X, U, \gamma)$, où $X = \{1, 2, \dots, 100\}$, $U = \{(a, b) \mid a \text{ divise } b \text{ et } a \neq b\}$ et $\gamma: U \rightarrow \mathbb{N}$ est définie par $\gamma(a, b) = \frac{b}{a}$.

- Trouver tous les chemins minimums du sommet 1 au sommet 100.
- Trouver le seul chemin de longueur 6 et de valeur 12.
- Montrer que $\gamma(c) > 52 \Rightarrow \ell(c) = 1$.

106 Imaginer cinq autres exemples de graphes valués.

2 méthode de Maria Hasse

Voici la *méthode de Maria Hasse* (1961) qui permet de calculer la matrice M des coûts minimums dans un graphe valué $G = (X, U, \gamma)$, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et C est la matrice des coûts. Considérons les opérations \oplus et \otimes , définies sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \cup \{0, \infty\} = [0, \infty]$, par: $a \oplus b = \min \{a, b\}$ et $a \otimes b = a + b$.

Calculons les puissances successives de la matrice $C = (c_{ij})$, en remplaçant les opérations habituelles d'addition et de multiplication par

les opérations \oplus et \otimes respectivement.

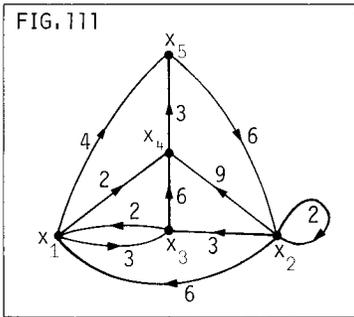
Par exemple, on aura $(C^2)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n (c_{ik} \otimes c_{kj}) = \min_k \{c_{ik} + c_{kj}\}$.

THEOREME Si k est tel que $C^k = C^{k+1}$, alors C^k est la matrice des coûts minimums.

Preuve. On montre facilement, par induction sur k , que $(C^k)_{ij}$ est le minimum parmi les coûts des chemins de longueur $\leq k$ de x_i à x_j . En effet, ceci découle de la formule $(C^k)_{ij} = (C^{k-1} \times C)_{ij} = \min_{\ell} \{c_{i\ell}^{(k-1)} + c_{\ell j}\}$. Si $C^k = C^{k+1}$, alors $\forall i, j$, $(C^k)_{ij}$ est le coût minimum pour tous les chemins de x_i à x_j , c.-à-d. $(C^k)_{ij} = m_{ij}$.

REMARQUE Comme un chemin minimum est toujours de longueur $< n = \text{ord } G$, on a toujours $C^{n-1} = C^n$.

EXEMPLE Considérons le graphe valué décrit par la figure 111.



$$C = \begin{bmatrix} 0 & \infty & 3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 9 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & 6 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 3 \\ \infty & 6 & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{On a } C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 8 & 10 \\ 2 & \infty & 0 & 4 & 6 \\ \infty & 9 & \infty & 0 & 3 \\ 12 & 6 & 9 & 15 & 0 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 9 \\ 2 & 12 & 0 & 4 & 6 \\ 15 & 9 & 12 & 0 & 3 \\ 11 & 6 & 9 & 14 & 0 \end{bmatrix}$$

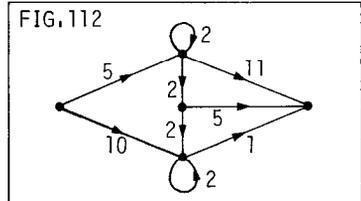
$$C^4 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 & 7 & 9 \\ 2 & 12 & 0 & 4 & 6 \\ 14 & 9 & 12 & 0 & 3 \\ 11 & 6 & 9 & 13 & 0 \end{bmatrix} = C^5.$$

70 GRAPHES VALUÉS

Le chemin de coût minimum de x_5 à x_4 , par exemple, est de coût 13 et de longueur 4. En effet, on a $(C^4)_{54} = 13$ et $(C^3)_{54} = 14$. Pour trouver un chemin de coût minimum de x_5 à x_4 , on procède comme suit: comme $c_{51}^3 + c_{14} = 13$ pour $i = 1$, ce chemin se termine par (x_1, x_4) ; comme $c_{51}^3 = 11 = c_{53}^2 + c_{31}$, il se termine par $(x_3, x_1), (x_1, x_4)$; comme $c_{53}^2 = 9 = c_{52} + c_{23}$, on trouve finalement le chemin, $[(x_5, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4)]$, qui a bien 13 comme coût.

EXERCICES

107 A l'aide de la méthode de Maria Hasse, trouver la matrice des coûts minimums pour le graphe valué:



108 A l'aide de la méthode de Maria Hasse, trouver la matrice des distances du graphe simple R_5 (la roue).

3 algorithme de Dijkstra

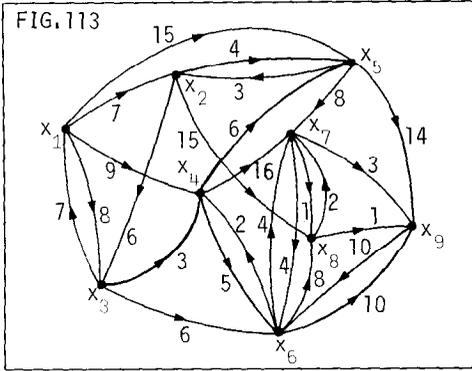
Considérons un graphe valué $G = (X, U, \gamma)$, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. On se propose de trouver un chemin de valeur minimum de x_1 à x_n . On attribue à chacun des sommets x_i un nombre $\lambda_i \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$, qui sera graduellement modifié. On pose d'abord $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_i = \infty$, pour $i > 1$. Chaque fois que x_i et x_j sont des sommets de G tels que $(x_i, x_j) \in U$ et $\lambda_j - \lambda_i > \gamma(x_i, x_j)$, on remplace ensuite λ_j par $\lambda_i + \gamma(x_i, x_j)$.

Ces changements d'étiquettes sont faits aussi longtemps que possible. A la fin, si $\lambda_n = \infty$, c'est qu'il n'y a pas de chemin de x_1 à x_n . Si $\lambda_n < \infty$, alors λ_n est la valeur d'un chemin minimum de x_1 à x_n .

Pour trouver un chemin minimum, on trouve d'abord n_1 tel que $\lambda_n - \lambda_{n_1} = \gamma(x_{n_1}, x_n)$, puis, n_2 tel que $\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2} = \gamma(x_{n_2}, x_{n_1}), \dots, n_k$ tel que $\lambda_{n_{k-1}} - \lambda_{n_k} = \gamma(x_{n_k}, x_{n_{k-1}})$ et $\lambda_{n_k} = \gamma(x_1, x_{n_k})$.

Un chemin minimum est alors $[x_1, x_{n_k}, x_{n_{k-1}}, \dots, x_{n_1}, x_n]$ et sa valeur est λ_n .

EXEMPLE Considérons le graphe valué décrit par la figure 113.



Les étiquettes λ_i peuvent successivement être:

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
0	∞							
	7	8	9	15	∞	∞	∞	∞
				11	14	25	22	∞
						19	20	22
						18	19	21
								20

et le chemin minimum $c = [x_1, x_3, x_6, x_7, x_8, x_9]$.

REMARQUE Afin de modifier, de façon plus systématique, les étiquettes dans l'algorithme de Dijkstra, en voici une version informatisée. Soit $G = (X, U) = (X, \Gamma)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\gamma: U \rightarrow (0, \infty)$. On veut construire une fonction (étiquette) $\lambda: X \rightarrow [0, \infty) \cup \{\infty\}$.

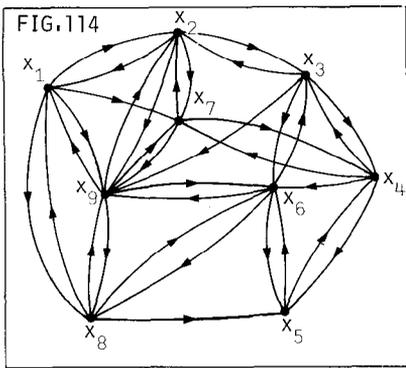
- I) Posons $\lambda(x_1) = 0$; $\lambda(x_i) = \infty$ pour $i = 2, 3, \dots, n$; posons $p = x_1$ et $A = \{x_1\}$. Passons à II).
- II) Pour tout $x_i \in \Gamma(p)$, remplaçons $\lambda(x_i)$ par $\min\{\lambda(x_i), \lambda(p) + \gamma(p, x_i)\}$. Passons à III).

III) Remplaçons p par le sommet x_j dans $X - A$, pour lequel $\lambda(x_j)$ est minimum. Remplaçons A par $A \cup \{p\}$. Passons à IV).

IV) Si $p = x_n$. STOP; $\lambda(p)$ est la valeur minimum d'un chemin x_1 à x_n .
Si $p \neq x_n$, passons à II).

REMARQUE L'algorithme de Dijkstra, dans le cas particulier où $\gamma(u) = 1, \forall u \in U$, donne l'algorithme de Moore pour trouver la distance entre deux sommets dans un graphe orienté.

EXEMPLE Appliquons l'algorithme de Dijkstra pour le graphe valué décrit par la figure 114, où C est la matrice des coûts.



0	10	∞	∞	∞	∞	3	6	12
10	0	18	∞	∞	∞	2	∞	13
∞	18	0	25	∞	20	∞	∞	7
∞	∞	25	0	5	16	4	∞	∞
∞	∞	∞	5	0	10	∞	∞	∞
∞	∞	20	∞	10	0	∞	15	9
∞	2	∞	4	∞	∞	0	∞	24
6	∞	∞	∞	23	15	∞	0	5
12	13	∞	∞	∞	9	24	5	0

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	
0	∞	; $p = x_1, A = \{x_1\}$							
0	10	∞	∞	∞	∞	3	6	12	; $p = x_7, A = \{x_1, x_7\}$
0	5	∞	7	∞	∞	3	6	12	; $p = x_2, A = \{x_1, x_2, x_7\}$
0	5	23	7	∞	∞	3	6	12	; $p = x_8, A = \{x_1, x_2, x_7, x_8\}$
0	5	23	7	29	21	3	6	11	; $p = x_4, A = \{x_1, x_2, x_4, x_7, x_8\}$
0	5	23	7	12	21	3	6	11	; $p = x_9$; STOP; $\lambda_9 = 11$

$$c = [x_1, x_8, x_9].$$

EXERCICES

109 Appliquer l'algorithme de Dijkstra pour trouver un chemin mini-

mum (et sa valeur) entre les sommets x_5 et x_4 , dans le graphe valué de la figure 111.

110 Trouver la matrice des coûts minimums, pour le graphe valué de la figure 110.

111 La matrice qui suit donne en heures les durées des voïs entre certaines villes v_1, v_2, \dots, v_6 .

0	3	∞	5	∞	∞
3	0	5	2	4	∞
∞	4	0	∞	4	3
6	2	∞	0	4	4
∞	4	4	5	0	2
∞	∞	5	4	3	0

a. Quel est l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 ?

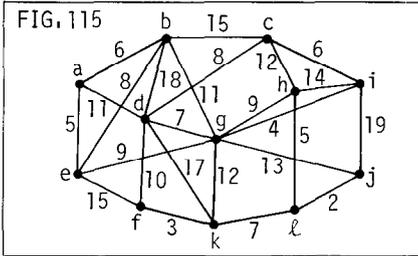
b. S'il y a une escale obligatoire de respectivement 2, 3, 1, 1, 4, 5 heures aux villes v_1, v_2, \dots, v_6 , quel est alors l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 ?

4 arbres partiels de coût minimum

DEFINITION Un *graphe simple valué* est un triplet (X, A, γ) où $G = (X, A)$ est un graphe simple et $\gamma: A \rightarrow (0, \infty)$ est une fonction appelée la *fonction de coût*.

DEFINITION Si $H = (Y, B)$ est un sous-graphe de G , alors le *coût* de H est défini par $\gamma(H) = \sum_{a \in B} \gamma(a)$.

EXEMPLE Les sommets de la figure 115 représentent douze cabanes à sucre dans une érablière du Québec. Lorsqu'une arête relie deux cabanes, c'est qu'on considère la possibilité de défricher un sentier entre ces deux cabanes. La valeur de l'arête représente alors le coût de construction de ce sentier. Il est naturel de chercher un réseau de sentiers (c.-à-d. un sous graphe) passant par toutes les cabanes (c.-à-d. graphe partiel) et permettant de passer de n'importe quel sommet à n'importe quel autre (c.-à-d. connexe). De plus, on cherche un tel réseau au coût minimum. Il est clair qu'un graphe partiel connexe de coût minimum sera nécessairement un arbre partiel car tout cycle simple contient au moins une arête superflue.



L'algorithme de Kruskal qui suit permet de trouver un arbre partiel de coût minimum dans un graphe simple connexe valué, (X,A,γ) .

ALGORITHME DE KRUSKAL Choisir successivement des arêtes de coût minimum, avec comme seule restriction le fait qu'elles ne doivent jamais former entre elles un cycle simple. Arrêter après avoir choisi la $n - 1^{\text{ième}}$ arête où $n = |X|$.

De façon plus informatisée:

I) Poser $E = \emptyset$ et passer à II).

II) Poser $e = a$, où $a \in A - E$ est tel que $\gamma(a) = \min \{\gamma(b) | b \in A - E \text{ et } (X, E \cup \{b\}) \text{ est une forêt}\}$. Remplacer E par $E \cup \{e\}$ et passer à III).

III) Si $|E| < n - 1$, passer à II). Si $|E| = n - 1$, STOP; $T = (X,E)$ est l'arbre partiel cherché.

EXEMPLE Appliquons l'algorithme de Kruskal au graphe simple valué de la figure 115. Un résultat possible sera: $\{\ell,j\}$, $\{f,k\}$, $\{g,i\}$, $\{e,a\}$, $\{\ell,h\}$, $\{a,b\}$, $\{c,i\}$, $\{d,g\}$, $\{k,\ell\}$, $\{e,g\}$ et $\{g,h\}$; le coût de l'arbre formé de ces onze arêtes est 63.

Il n'est pas si facile pour un ordinateur de "voir" si un sous-graphe est une forêt ou non, comme le demande l'étape II de l'algorithme de Kruskal. Voici donc un deuxième algorithme qui nous vient de M. Sollin modifié par Richard Caestagne, permettant de trouver un arbre partiel de coût minimum dans un graphe simple valué connexe (X,A,γ) donné.

ALGORITHME DE SOLLIN-CAESTAGNE

I) Soit $a_0 = \{x_0, y_0\}$ une arête de coût minimum.

Posons $S = \{x_0, y_0\}$ et $T = \{a_0\}$. Passer à II).

II) Si $S = X$, alors (X, T) est l'arbre cherché. Sinon, passer à III).

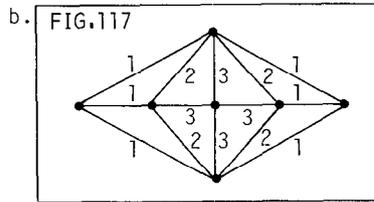
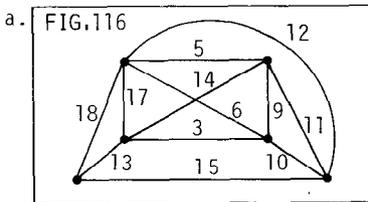
III) Parmi les arêtes ayant un sommet dans S et un sommet dans $X - S$, en choisir une, disons $a = \{x, y\}$, où $x \in S$ et $y \notin S$, de coût minimum. Remplacer S par $S \cup \{y\}$ et T par $T \cup \{a\}$. Passer à II).

REMARQUE Dans l'algorithme de Sollin-Calestagne, on construit un arbre de plus en plus grand. Après le choix de la $k^{\text{ième}}$ arête, l'arbre, disons T_k , est d'ordre $k+1$ et T_{n-1} est l'arbre cherché.

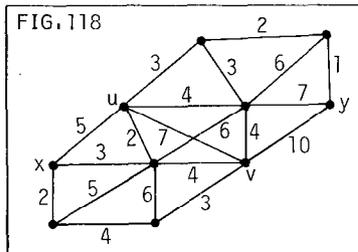
EXERCICES

112. Appliquer l'algorithme de Sollin-Calestagne au graphe simple valué de la figure 115.

113. Trouver un arbre partiel de coût minimum dans chacun des graphes simples valués suivants:



114. Dans le graphe simple valué de la figure 118,

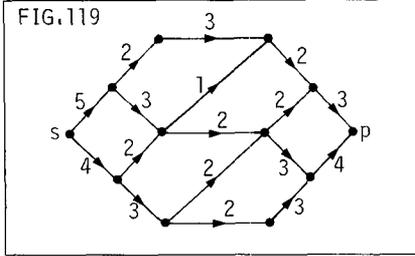


- trouver un arbre partiel de coût minimum;
- trouver un arbre partiel de coût maximum;
- trouver une chaîne minimum du sommet x au sommet y ;
- parmi tous les arbres passant par les sommets x , u et v , en trouver un qui soit de coût minimum.

5 réseaux

DEFINITION Un *réseau* est un graphe valué $G = (X, U, \gamma)$ dans lequel il y a un unique sommet s (appelé la *source*) tel que $d^-(s) = 0$ et un unique sommet p (appelé le *puits*) tel que $d^+(p) = 0$. Pour $u \in U$, le nombre $\gamma(u)$ est appelé la *capacité* de la flèche u .

EXEMPLE 1

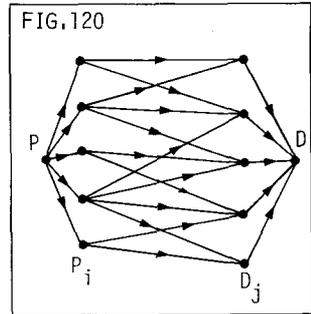


EXEMPLE 2 Le graphe orienté (X, U) peut représenter un circuit électrique où, pour $u \in U$, $\gamma(u)$ est la capacité du fil électrique u .

EXEMPLE 3 Le graphe orienté (X, U) peut représenter le réseau de transport en commun (en autobus) d'une petite ville. Les sommets s et p sont les garages d'entretien et $\gamma(u)$ est le nombre maximum d'autobus pouvant emprunter l'artère u durant une heure.

EXEMPLE 4 Dans la figure 120, les sommets P_i représentent des producteurs et les sommets D_j des distributeurs.

Lorsque $(P_i, D_j) \in U$, $\gamma(P_i, D_j)$ est le nombre maximum d'unités pouvant, durant une semaine, être acheminé par le producteur P_i au distributeur D_j . Ajoutons deux sommets P et D , et les flèches $(P, P_i), \forall i$, et $(D_j, D), \forall j$. De plus, posons $\gamma(P, P_i) =$ la production hebdomadaire maximum de P_i et $\gamma(D_j, D) =$ la distribution hebdomadaire maximum faite par D_j .



DEFINITION Dans le réseau, $G = (X, U, \gamma)$, pour $x \in X$ posons:

$$\gamma^+(x) = \sum_{(x,y) \in U} \gamma(x,y) \quad \text{et} \quad \gamma^-(x) = \sum_{(y,x) \in U} \gamma(y,x).$$

Il est évident que $\sum_{x \in X} \gamma^+(x) = \sum_{x \in X} \gamma^-(x)$. En effet, toute flèche $u = (x,y)$, contribue pour $\gamma(u)$ dans le terme $\gamma^+(x)$ de la somme de gauche et pour $\gamma(u)$ dans le terme $\gamma^-(y)$ de la somme de droite.

DEFINITION Un *flot* f , pour le réseau $G = (X, U, \gamma)$, est une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que i) $\forall u \in U, 0 \leq f(u) \leq \gamma(u)$

$$\text{ii) } \forall x \in X, f^+(x) = f^-(x) \text{ si } x \neq s \text{ et } x \neq p.$$

Puisque $\sum_{x \in X} f^+(x) = \sum_{x \in X} f^-(x)$, on a $f^+(s) = f^-(p)$. Cette quantité s'appelle la *valeur* du flot f . De plus, une flèche $u = (x,y)$ est dite *saturée* (par f), si $f(u) = \gamma(u)$, et *non-saturée* si $f(u) < \gamma(u)$. Le flot f est dit *complet* si tout chemin de s à p passe par au moins une flèche saturée.

DEFINITION Dans le réseau, $G = (X, U, \gamma)$, un ensemble de flèches, $S \subseteq U$, est appelé un *sp-séparateur* (ou séparateur) si tout chemin dans G , de s à p , passe par au moins une flèche de S . La *valeur* (ou *capacité*) du sp-séparateur S est $\gamma(S) = \sum_{v \in S} \gamma(v)$.

REMARQUE Si f est un flot dans le réseau $G = (X, U, \gamma)$ et $S \subseteq U$ est un sp-séparateur de G , alors la valeur de f est au plus égale à la capacité de S . Si la valeur de f est $\gamma(S)$, c'est que toutes les flèches dans S sont saturées par f .

Les exemples 2, 3 et 4 devraient convaincre le lecteur qu'il est souvent utile de trouver un *flot maximum*, c.-à-d. qui soit de valeur maximum. Le théorème qui suit, officiellement attribué à Ford et Fulkerson (1955), mais également publié, en slovaque, quelques années auparavant par l'école hongroise de théorie des graphes, permettra de décrire un algorithme pour construire un flot maximum dans un réseau donné. Ce théorème est appelé le *théorème de dualité* de Ford-Fulkerson.

THEOREME (Ford-Fulkerson (1955)). Dans un réseau $G = (X, U, \gamma)$, si f est un flot de valeur maximum v , et S est un séparateur de capacité minimum c , alors $v = c$.

Preuve. Supposons, au contraire que $v \neq c$; par la remarque précédente, on a $v < c$. Soit $V \subseteq X$ l'ensemble des sommets x pour lesquels il existe une chaîne $c = [s, x_1, \dots, x_k = x]$ de s à x dans le graphe orienté (X, U) , où

$$(x_i, x_{i+1}) \in U \Rightarrow (x_i, x_{i+1}) \text{ n'est pas saturée par } f, \text{ et,}$$

$$(x_i, x_{i+1}) \in U^{-1} \Rightarrow f(x_{i+1}, x_i) > 0. \text{ Soit } W = X - V.$$

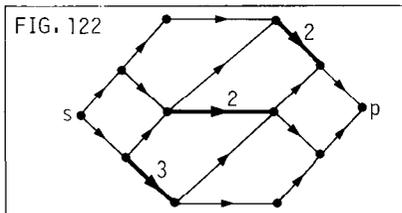
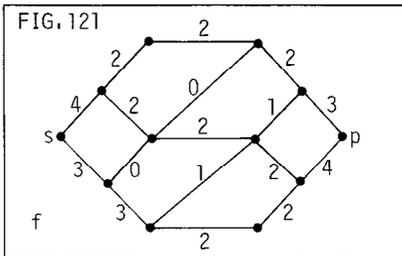
On a $p \in W$. Sinon, soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq \gamma(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})$ pour tout i avec $(x_i, x_{i+1}) \in U$ et tel que $\epsilon \leq f(x_{i+1}, x_i)$ pour tout i tel que $(x_{i+1}, x_i) \in U$. Il est clair que $f' : U \rightarrow \mathbb{R}$, défini par :

$$f'(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \text{ n'est pas dans la chaîne } c \\ f(u) + \epsilon & \text{si } u = (x_i, x_{i+1}) \text{ est dans la chaîne } c \text{ "dans le bon sens"} \\ f(u) - \epsilon & \text{si } u = (x_{i+1}, x_i) \text{ est dans la chaîne } c \text{ "dans le mauvais sens",} \end{cases}$$

est un flot dans $G = (X, U, \gamma)$ de valeur strictement supérieure à la valeur du flot maximum f . Ceci est une contradiction et on doit donc avoir $p \in W \neq \emptyset$. Soit $S' \subseteq U$ défini par :

$S' = \{(x, y) \mid x \in V \text{ et } y \in W\} \neq \emptyset$. On voit facilement que S' est un séparateur dont la capacité est égale à v ; contradiction car alors $\gamma(S') < \gamma(S)$ et S est minimum. En effet, S' est évidemment un séparateur et de plus toute flèche $(x, y) \in S'$ est saturée par f sinon $y \in V$.

EXEMPLE Considérons le réseau décrit par la figure 119. Il est facile de voir que le flot f (fig. 121) et le séparateur S (fig. 122) sont respectivement maximum et minimum.



ALGORITHME DE FORD-FULKERSON pour trouver un flot maximum dans un réseau $G = (X, U, \gamma)$ donné.

Première partie: trouver un flot complet.

I) Choisir arbitrairement un flot f . Par exemple, on peut prendre le flot nul, $f(u) = 0, \forall u \in U$. Mais il est préférable d'en prendre un dont la valeur est la plus grande possible.

II) Noter $\bullet \rightarrow \bullet$ les flèches de G saturées par f . Dans le graphe partiel, composé des flèches non-saturées, chercher un chemin de s à p . Si un tel chemin n'existe pas, par définition, ceci veut dire que f est le flot complet cherché. Si $c = [s = x_0, x_1, \dots, x_k = p]$ est un chemin composé de flèches non-saturées, poser

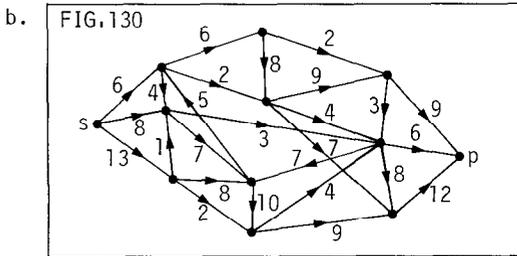
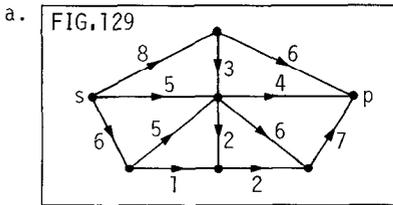
$\epsilon = \min_{0 \leq i < k} \{\gamma(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})\}$ et remplacer, $\forall 0 \leq i < k$, la valeur de $f(x_i, x_{i+1})$, par $f(x_i, x_{i+1}) + \epsilon$. Dans le chemin c au moins une flèche deviendra alors saturée. En appliquant l'étape II), aussi longtemps que possible, on trouve finalement un flot complet pour G .

Deuxième partie: à partir d'un flot complet f , construire un flot maximum.

III) Attribuer aux sommets de G des étiquettes $+$ ou $-$ en observant, aussi longtemps que possible, les règles suivantes:

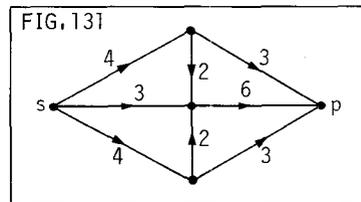
- i) le sommet s reçoit l'étiquette $+$.
- ii) si x a une étiquette, $(x, y) \in U$ est une flèche non-saturée par f et y n'a pas d'étiquette, alors y reçoit l'étiquette $+$.
- iii) si x a une étiquette, $(y, x) \in U$ est une flèche non-nulle, c.-à-d. $f(y, x) > 0$, et y n'a pas d'étiquette, alors y reçoit l'étiquette $-$.

A la fin de l'étape III), de deux choses l'une. Ou bien le puits p n'est pas étiqueté et alors le flot f n'est pas seulement complet mais également maximum. Ou bien le puits p a reçu une étiquette (nécessairement $+$). Dans ce cas, prenons une chaîne $c = [s = x_0, x_1, \dots, x_k = p]$, où pour certains i , x_{i+1} a l'étiquette $+$, $(x_i, x_{i+1}) \in U$ et $0 < \epsilon_i = \gamma(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1})$, et, pour les autres i , x_{i+1} a l'étiquette $-$, $(x_{i+1}, x_i) \in U$ et $\epsilon_i = f(x_{i+1}, x_i) > 0$. On change alors la valeur de $f(x_i, x_{i+1})$ par $f(x_i, x_{i+1}) + \epsilon_i$, si x_{i+1} a l'étiquette $+$, et la valeur de $f(x_{i+1}, x_i)$ par $f(x_{i+1}, x_i) - \epsilon_i$, si x_{i+1} a l'étiquette $-$, où $\epsilon = \min_{0 \leq i < k} \epsilon_i$. Il est clair qu'à la fin de l'étape III), la valeur du flot f a été augmentée de ϵ . On applique l'étape III) jusqu'à ce



116 Dans le réseau suivant,

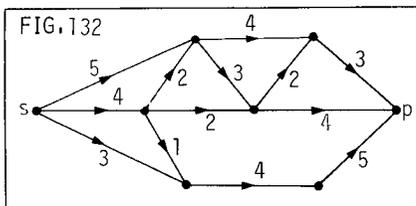
- trouver un flot maximum.
- combien y a-t-il de flots maximums?
- existe-t-il un flot complet qui ne soit pas maximum?



117 Chaque semaine, la succursale S_i ($i = 1, \dots, 5$) de la Croix-Rouge peut acheminer jusqu'à a_{ij} litres de sang à l'hôpital H_j ($j = 1, \dots, 6$). Sachant que durant la semaine, les succursales disposent de respectivement 200, 300, 250, 300, 150 litres et qu'un hôpital n'arrive jamais à utiliser plus de 250 litres, trouver la quantité maximum de sang pouvant hebdomadairement être utilisée dans l'ensemble des hôpitaux.

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 80 & 40 & 0 & 0 & 0 \\ 120 & 110 & 150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 90 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 90 & 100 & 40 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 80 & 100 & 50 \end{bmatrix}$$

118 Dans le réseau de la fig. 132, trouver un flot complet qui ne soit pas maximum. Trouver, à partir de ce flot, un flot maximum et le séparateur, de même valeur, qui lui est associé.



6 couplage

Soit $G = (X,A)$ un graphe simple. Un *couplage* M de G est un sous-graphe de G qui est régulier de degré 1; en d'autres mots, M est un ensemble d'arêtes disjointes. Nous dirons que M *sature* le sommet x si $d_M(x) = 1$, et que M *sature* $S \subseteq X$, si $\forall x \in S$, M *sature* x . Si M *sature* X , on dit que le couplage M est *parfait*. Un couplage parfait M de G n'est donc rien d'autre qu'un facteur linéaire de G . Le couplage M est dit *maximal* (maximum) si pour tout couplage M' , $M \subseteq M' \Rightarrow M = M'$ ($|M| \leq |M'| \Rightarrow |M| = |M'|$). Une chaîne c de G est dite *alternée* (par rapport au couplage M) si les arêtes de c sont alternativement dans $A - M$ et dans M .

THEOREME (Hall, 1935). Soit G un graphe simple biparti dont $\{X,Y\}$ est une bipartition. Alors il existe un couplage M de G saturant X , si et seulement si, pour toute partie S de X , on a $|V(S)| \geq |S|$, où $V(S) \subseteq Y$ est l'ensemble des sommets voisins de S , c.-à-d. adjacents à au moins un sommet de S .

Preuve. Supposons que G admette un couplage M , saturant X , et soit $S \subseteq X$. Comme M détermine une bijection entre S et un sous-ensemble de $V(S)$, on a bien $|V(S)| \geq |S|$.

Inversement, supposons que $\forall S \subseteq X$, $|V(S)| \geq |S|$, mais que G n'admette aucun couplage saturant X . Soit M un couplage maximum de G et $x_0 \in X$ un sommet non-saturé par M . Posons $T = \{z \in X \cup Y \mid \text{il existe une chaîne alternée, par rapport à } M, \text{ de } x_0 \text{ à } z\}$. Le sommet x_0 est le seul sommet non-saturé de T , autrement il y aurait une chaîne alternée c de x_0 à z , avec z non-saturé; c.-à-d. $c = [x_0, x_1, \dots, x_{2k+1} = z]$. Ceci est contradictoire car en remplaçant dans M les arêtes $\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \dots, \{x_{2k-1}, x_{2k}\}$ par les arêtes $\{x_0, x_1\}, \{x_2, x_3\},$

..., $\{x_{2k}, x_{2k+1}\}$, on obtient un couplage M' de G avec

$|M'| = |M| + 1 > |M|$. Soit, maintenant $S = X \cap T$ et $S' = Y \cap T$. Il

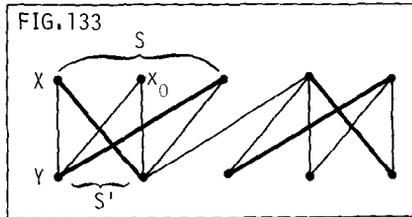
est facile de voir que $V(S) = S'$,

mais comme M établit une bijection entre $S - \{x_0\}$ et S' , on a

$|S'| = |S| - 1$. Ceci contredit

l'hypothèse de départ car alors

$|V(S)| < |S|$.



COROLLAIRE Soit G un graphe simple biparti régulier de degré $k > 0$, alors G admet un couplage parfait.

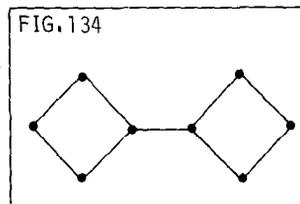
Preuve. Soit $\{X, Y\}$ une bipartition de G . Comme le nombre d'arêtes de G est à la fois $k|X|$ et $k|Y|$, on a $|X| = |Y|$. Pour $S \subseteq X$, soit A_1 les arêtes de G incidentes à un sommet de S et A_2 les arêtes de G incidentes à un sommet de $V(S)$. On a alors $|A_1| = k \cdot |S|$, $|A_2| = k \cdot |V(S)|$. De plus, $|A_2| \geq |A_1|$ car, évidemment, $A_1 \subseteq A_2$. Ceci montre que $|V(S)| \geq |S|$. Par le théorème de Hall, il existe donc un couplage M saturant X . Comme $|X| = |Y|$, le couplage M est parfait.

REMARQUE Ce corollaire est souvent appelé le *théorème des mariages*. Si dans l'ensemble des clients d'une agence de rencontre, chaque homme est compatible avec k femmes, et inversement, chaque femme est compatible avec k hommes, où $k \geq 1$, alors il existe un couplage parfait des hommes avec les femmes.

EXERCICES

119 Dans le graphe simple à droite,

- trouver un couplage maximal qui ne soit pas maximum;
- trouver un couplage parfait.

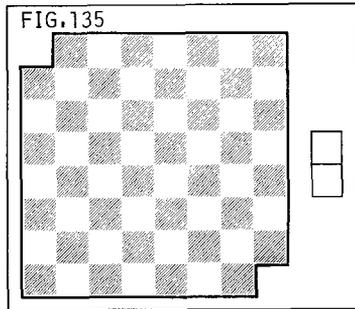


120 Prouver que les graphes simples suivants admettent un couplage parfait:

- le graphe biparti complet, $K_{n,n}$;
- le cube de dimension n , B_n ;
- le graphe de Petersen généralisé, $P(n,k)$;

d. le graphe complet, K_{2n} .

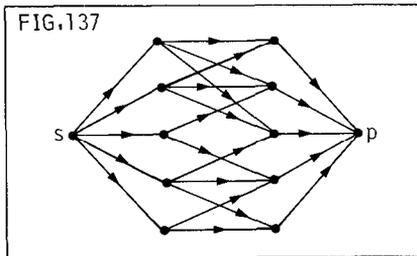
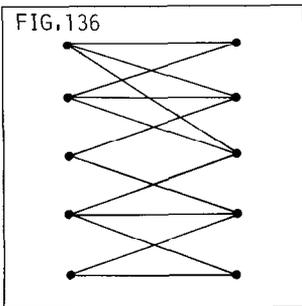
121 Est-il possible de recouvrir l'échiquier (fig. 135), auquel il manque deux cases, à l'aide de 31 pièces de domino de grandeur 1 par 2 ?



122 Prouver que tout graphe simple biparti régulier de degré $k \geq 1$, possède une factorisation linéaire.

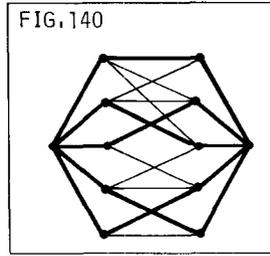
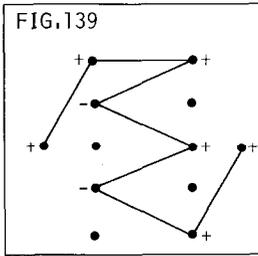
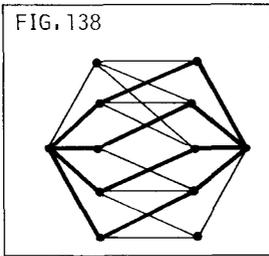
L'algorithme de Ford-Fulkerson (présenté dans la section précédente) peut être utilisé pour résoudre un problème de couplage.

Plus précisément, soit G un graphe biparti, dont $\{X, Y\}$ est une bipartition. Construisons un réseau, dont l'ensemble des sommets est $\{s, p\} \cup X \cup Y$, en prenant comme flèches les couples (s, x) , $\forall x \in X$, les couples (y, p) , $\forall y \in Y$, et les couples (x, y) où $\{x, y\}$ est une arête de G . De plus, on pose $\gamma(u) = 1$ pour toute flèche de ce graphe orienté. Par exemple, le graphe biparti de la figure 136 donne le réseau de la figure 137.



En ne considérant que des flots prenant les valeurs 0 et 1, l'algorithme de Ford-Fulkerson donne un flot maximum f de valeur k . Les k flèches, de la forme (x, y) et de valeur 1, donnent alors un couplage maximum $M = \{(x, y) | f(x, y) = 1\}$, de valeur k dans G . Bien sûr, on a $k \leq \min\{|X|, |Y|\}$, et si $k = |X|$ ($k = |Y|$), alors M sature X (sature Y).

EXEMPLE On considère le réseau donné par la figure 137.

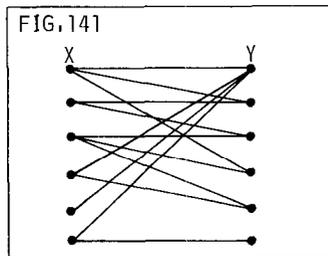


La figure 138 est un flot complet, $f: U \rightarrow \{0,1\}$, où un trait au crayon gras représente une flèche de valeur 1 et un trait fin une flèche de valeur 0.

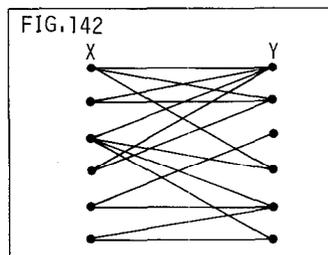
La figure 139 représente l'étape III) de l'algorithme de Ford-Fulkerson donnant le flot maximum de la figure 140.

EXERCICES

- 123 Dans le graphe biparti suivant, X est un ensemble de travailleurs et Y est un ensemble d'emplois; de plus, la présence de l'arête $\{x,y\}$ veut dire que x peut occuper l'emploi y. Trouver une façon d'attribuer le plus d'emplois possibles aux travailleurs dans X.



- 124 Dans le graphe biparti suivant, X est un ensemble de clubs et Y est un ensemble d'individus; de plus la présence de l'arête $\{x,y\}$ veut dire que l'individu y fait partie du club x. Trouver le plus de représentants distincts pour les clubs.



4

PLANARITÉ

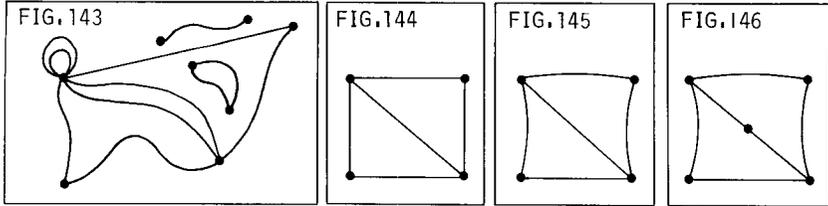
1 graphes planaires

Soit $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ et $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction continue, on appelle l'image $C = f[0,1]$ de f une *courbe planaire*. Les points $f(0)$ et $f(1)$ sont les *extrémités* de C . On dit que C est *fermée* si $f(0) = f(1) = x$. On dit aussi que C est une boucle en x . On dit que C est *simple* si f peut être choisie telle que $\forall 0 < t, s < 1$, $f(t) = f(s) \Rightarrow t = s$ (c.-à-d. si C ne se coupe pas).

Une courbe fermée et simple est souvent appelée *courbe de Jordan*.

DEFINITION Une *figure planaire* est un couple ordonné (X, F) , où $X \subseteq \mathbb{R}^2$ est un ensemble fini, appelé ensemble des sommets, et où $F \subseteq \mathbb{R}^2$ est la réunion d'un nombre fini de courbes planaires simples entre ces sommets. De plus, deux quelconques de ces courbes, si elles ne sont pas distinctes, ne peuvent avoir comme intersection qu'une ou deux extrémités communes. Si $x \in X$, on note $\deg x$ le nombre de courbes ayant x comme extrémité, en comptant deux fois les boucles en x . Par abus de langage, on dit souvent que F est la figure planaire.

EXEMPLES Les figures 143, 144, 145 et 146 représentent respectivement quatre figures planaires, (X_i, F_i) , $i = 1, 2, 3, 4$.

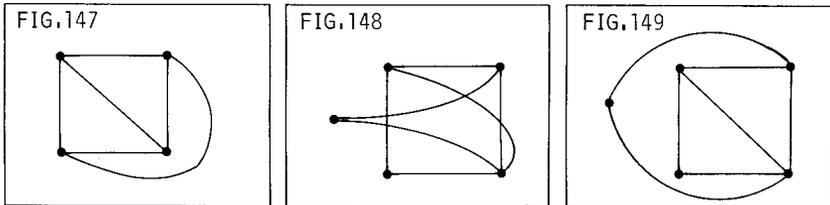


Noter que (X_2, F_2) et (X_3, F_3) sont différentes, bien que $X_2 = X_3$ et que les courbes de F_2 et de F_3 relient les mêmes paires de sommets. Noter également que (X_3, F_3) et (X_4, F_4) sont différentes, bien que les ensembles F_3 et F_4 soient égaux.

DEFINITION Un graphe simple $G = (X, A)$ est dit *planaire* s'il admet au moins une représentation géométrique (voir page 2) qui soit une figure plane. On appelle une telle représentation géométrique un *plongement* de G dans \mathbb{R}^2 .

EXEMPLE 1 Le graphe complet K_4 est planaire puisque la figure 147 en donne un plongement.

EXEMPLE 2 Le graphe simple, décrit par la figure 148, est planaire car la figure 149 en est une autre représentation géométrique qui, cette fois, est une figure plane.



Le théorème suivant décrit une propriété fondamentale de la topologie du plan cartésien \mathbb{R}^2 .

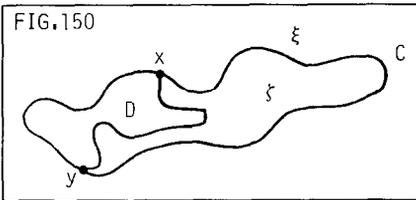
THEOREME DE JORDAN Soit $C \subseteq \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple. L'ensemble $\mathbb{R}^2 - C$ est alors la réunion disjointe de deux ouverts dont la frontière commune est C . Un de ces ouverts, noté ζ , est borné, l'autre, noté ξ , est non-borné. On appelle ζ l'intérieur de C et ξ l'extérieur de C .

Pour *preuve*, consulter un bon livre de topologie, par exemple [8].

Ce théorème est intuitivement évident, mais c'est en essayant de le démontrer rigoureusement qu'on découvre la différence entre un mathématicien et un dessinateur.

COROLLAIRE Soit x et y deux points distincts d'une courbe de Jordan C , et D une courbe simple de x à y telle que $C \cap D = \{x, y\}$. Soit $D_0 = D - \{x, y\}$, alors on a $D_0 \subseteq \zeta$ ou $D_0 \subseteq \xi$.

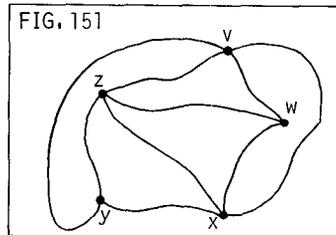
Preuve. Supposons le contraire; $D_0 \cap \zeta$ et $D_0 \cap \xi$ sont alors des ouverts, disjoints et non-vides de D_0 , dont la réunion est D_0 . Par définition, D_0 est donc un espace non-connexe. Ceci contredit le fait que l'image, par une fonction continue, d'un espace connexe est toujours un espace connexe. En effet, si $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction continue telle que $f([0, 1]) = D$, alors, $(0, 1)$ étant connexe, l'ensemble $f((0, 1)) = D_0$ devrait l'être aussi.



Revenons pour le moment à la notion de graphe planaire. Les deux propositions qui suivent nous donnent nos premiers exemples de graphes non-planaires.

PROPOSITION Le graphe complet K_5 est non-planaire.

Preuve. Supposons K_5 planaire et soit $F \subseteq \mathbb{R}^2$ une figure planaire, qui en est une représentation géométrique. Soit v, w, x, y, z les sommets de F .



Les courbes dans F allant de v à w , de w à x , de x à y , de y à z et de z à v , mises bout-à-bout, donnent une courbe fermée simple C . La courbe, dans F , allant de z à w , est, ou bien à l'intérieur, ou bien à l'extérieur de C (corollaire précédent). Sans perte de généralité, supposons qu'elle est à l'intérieur de C . Les courbes de v à y et de v à x sont alors à l'extérieur de C et la courbe de z à x à l'intérieur de C . L'existence

de la courbe de y à w dans F ne coupant aucune des courbes déjà tracées est alors contradictoire car w est à l'intérieur de la courbe fermée simple $[z,x,v,z]$ et y à l'extérieur.

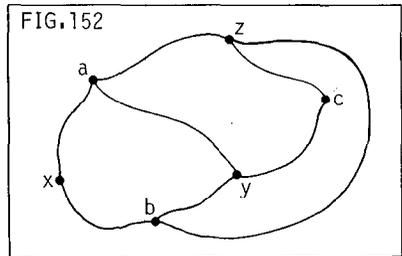
PROPOSITION Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est non-planaire.

Preuve. Supposons $K_{3,3}$ planaire et soit F une figure plane qui en est une représentation géométrique.

Soit a, b, c, x, y, z les sommets de F .

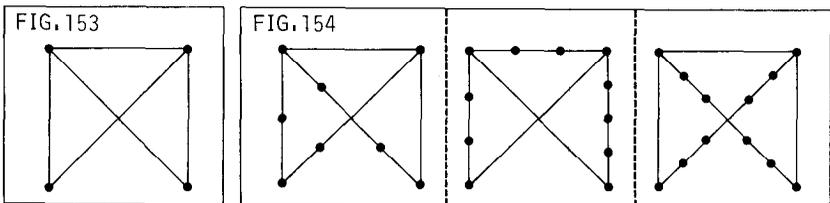
Considérons la courbe fermée simple C , obtenue en mettant bout-à-bout les courbes de F allant respectivement de a à x , de x à b , de b à y , de y à c , de c à z et de z à a .

Supposons que la courbe de a à y , soit, par exemple, à l'intérieur de C . La courbe de z à b est alors à l'extérieur de C , autrement un point z' , intérieur à $[a,y,c,z,a]$ et voisin de z , serait relié à b , qui, lui, est à l'extérieur de $[a,y,c,z,a]$, par une courbe ne coupant pas $[a,y,c,z,a]$. L'existence de la courbe de c à x dans F , conduit à une contradiction. En effet, le point c est à l'intérieur de $[a,y,b,z,a]$ et x à l'extérieur.



DEFINITION Appelons *subdivision* du graphe simple $G = (X,A)$, tout graphe simple obtenu en ajoutant, sur les arêtes de G , de nouveaux sommets (qui sont alors de degré égal à 2).

EXEMPLE La figure 154 donne diverses subdivisions du graphe simple de la figure 153.



PROPOSITION Si le graphe simple $G = (X,A)$ contient, comme sous-

graphe, une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$, alors G n'est pas planaire.

Preuve. Toute représentation géométrique F de G donne une représentation géométrique de K_5 (ou $K_{3,3}$) en effaçant les courbes et sommets superflus et en enlevant les sommets de la subdivision. Si F est une figure planaire, on obtient ainsi une figure planaire représentant K_5 (ou $K_{3,3}$). Ce qui contredit le fait que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.

REMARQUE Kuratowski a démontré (1930) que, réciproquement, tout graphe non-planaire s'obtient de cette façon (voir [1] ou [21]). La non-planarité est une maladie dont plusieurs graphes simples sont atteints. Les seuls virus pouvant la transmettre ont cependant été isolés par Kuratowski, ce sont K_5 et $K_{3,3}$.

Quelle que soit la surface T et le graphe simple G , il est intéressant de se demander si G peut être plongé (c.-à-d. tracé sans intersection des arêtes) dans T . Une telle représentation de G comme figure sur T est appelée un *plongement* de G dans T .

La proposition qui suit règle le cas de la sphère S .

PROPOSITION Un graphe simple peut être plongé dans S si et seulement s'il est planaire.

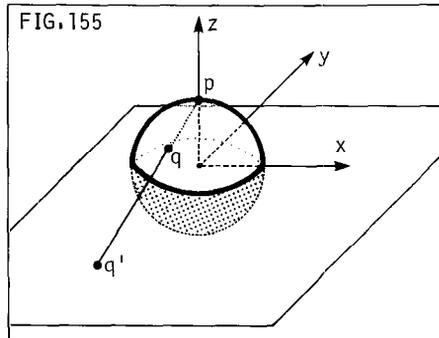
Preuve. Définissons $S \subseteq \mathbb{R}^3$, par $S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, c.-à-d. la sphère de rayon 1 centrée au point $(0,0,0)$. Le point $p = (0,0,1)$ est appelé le *pôle nord*. Les topologues utilisent souvent une bijection γ de $S - \{p\}$ sur \mathbb{R}^2 , appelée la *projection stéréographique*. Etant donné un point $q \in S - \{p\}$, on définit $\gamma(q) = q'$ comme étant l'unique point de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$, se trouvant sur la droite passant par p et q (fig. 155). Plus précisément, si

$q = (x,y,z)$, alors

$$q' = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right); \text{ inversement}$$

si $q' = (x,y)$, alors

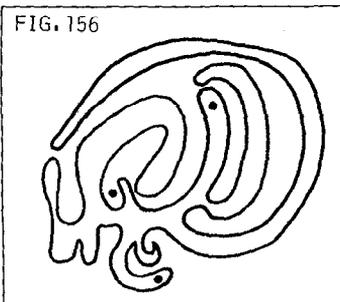
$$q = \frac{(2x, 2y, x^2 + y^2 - 1)}{1 + x^2 + y^2}.$$



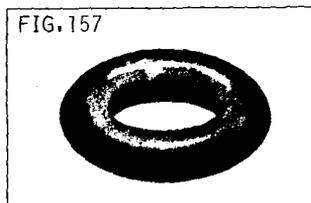
A tout plongement de G dans \mathbb{R}^2 , on peut donc associer un plongement de G dans S . Inversement, à tout plongement de G dans S , ne touchant pas au pôle nord, on peut, par projection stéréographique, associer un plongement de G dans \mathbb{R}^2 .

EXERCICES

- 125 Soit C une courbe fermée simple dans le plan \mathbb{R}^2 . Soit ζ son intérieur et ξ son extérieur. Si D est une demi-droite partant d'un point $p \in \mathbb{R}^2 - C$, et ne coupant C qu'en n points non-tangents à C , vérifier que n est pair si et seulement si $p \in \xi$ et que n est impair si et seulement si $p \in \zeta$. Appliquer ce critère aux trois points de la figure 156 pour déterminer s'ils appartiennent à ζ ou à ξ .

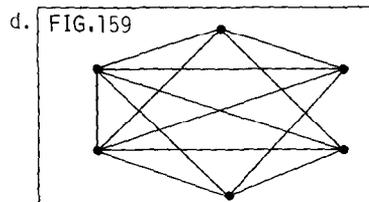
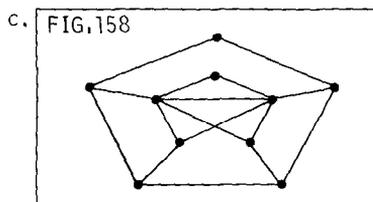


- 126 Montrer que $K_{3,3}$, K_5 , K_6 et K_7 , peuvent être plongés dans la surface T , où T est un tore (fig. 157).



- 127 Définir la notion de graphe spatial, en remplaçant \mathbb{R}^2 par \mathbb{R}^3 , et prouver que tout graphe simple est spatial.
- 128 Les graphes simples suivants sont-ils planaires?

- a. $K_{p,q}$ b. R_n (roi)



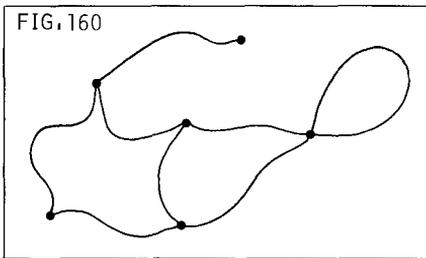
- *129 Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples non-planaires d'ordre 6 ou moins.

- 130 Soit G un graphe simple et \bar{G} son complémentaire, prouver que si $|G| > 11$ alors G ou \bar{G} est non-planaire.
- 131 Trouver des graphes simples G , d'ordre 8, tel que G et \bar{G} soient:
 a. tous deux planaires, b. tous deux non-planaires.

2 formule d'Euler

Soit $F \subseteq \mathbb{R}^2$ une figure plane. Les composantes connexes de l'ensemble $\mathbb{R}^2 - F$ sont appelées les *faces* de F . En d'autres mots, pour $x, y \in \mathbb{R}^2 - F$, si l'on pose $x \sim y$ lorsqu'il existe une courbe de x à y dans $\mathbb{R}^2 - F$, on obtient alors une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{R}^2 - F$, dont les classes sont précisément les faces de F . Il est à noter qu'une figure plane admet toujours une face non-bornée, appelée la face *infinie*.

EXEMPLE La figure plane suivante admet quatre faces.



THEOREME (formule d'Euler (1752)) Si F est une figure plane connexe admettant n sommets, m courbes et f faces, alors :

$$n - m + f = 2.$$

Preuve par récurrence sur m . Si $m = 0$, alors $n = f = 1$ et la formule est vérifiée. De même si $m = 1$, on a $n = 1$ et $f = 2$ (si la courbe est une boucle) ou, $n = 2$ et $f = 1$. Supposons la formule vraie pour toute figure plane connexe ayant m courbes ou moins. Soit F une figure plane connexe à m courbes (n sommets et f faces) à laquelle on ajoute une $(m + 1)^{\text{jème}}$ courbe C . Si C est une boucle, alors m devient $m + 1$, f devient $f + 1$ et n reste inchangé, la formule reste donc vraie. Si C relie deux sommets distincts de F , alors f devient $f + 1$ (car une face de F est coupée en deux), m devient $m + 1$ et n

reste inchangé, la formule reste donc vraie. Finalement, si C est une courbe reliant un sommet de F à un nouveau sommet, alors f reste inchangé, et, n et m sont augmentés de 1. La formule d'Euler reste donc également vraie dans ce dernier cas.

La formule d'Euler a d'importantes conséquences dans l'étude des graphes simples planaires.

PROPOSITION Si F et F' sont deux figures planaires obtenues en plongeant le graphe simple $G = (X,A)$ dans \mathbb{R}^2 , alors F et F' ont le même nombre de faces.

Preuve. On peut, bien sûr, supposer G connexe. Soit $n = |X|$, $m = |A|$. On a $n - m + f = 2 = n - m + f'$, où on note par f et f' le nombre de faces de F et F'; d'où $f = f'$.

PROPOSITION Soit G un graphe simple planaire ayant n sommets, m arêtes et f faces, alors $3f \leq 2m$.

Preuve. Numérotons de 1 à m les arêtes de G et de 1 à f les faces de F. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice $m \times f$ où a_{ij} est 1, si la $i^{\text{ème}}$ arête est sur la frontière de la $j^{\text{ème}}$ face, et 0, dans l'autre cas.

Soit $\sigma = \sum_{i,j} a_{ij}$. Puisque chaque courbe de F borde au plus deux faces,

$$\text{on a } \sigma = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^f a_{ij} \right) \leq \sum_{i=1}^m 2 = 2m. \text{ Comme G est un graphe simple,}$$

chaque face est bordée par au moins trois courbes. On a donc

$$\sigma = \sum_{j=1}^f \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} \right) \geq \sum_{j=1}^f 3 = 3f. \text{ D'où } 3f \leq \sigma \leq 2m.$$

COROLLAIRE Soit G un graphe simple planaire connexe d'ordre n, où $n \geq 3$, et ayant m arêtes, alors $m \leq 3n - 6$.

Preuve. Comme G est connexe, on a $n - m + f = 2$, où f est le nombre de faces d'un plongement planaire F quelconque de G. Par la proposition précédente, on a cependant $f \leq \frac{2}{3}m$. D'où l'on tire $n - m + \frac{2m}{3} \geq 2$, c'est-à-dire $m \leq 3n - 6$.

COROLLAIRE Le graphe complet K_5 est non-planaire.

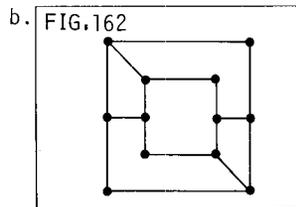
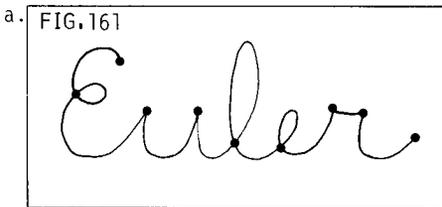
Preuve. Dans ce cas, $n = 5$ et $m = 10$; puisque $m > 3n - 6$, le graphe simple K_5 n'est donc pas planaire.

COROLLAIRE Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est non-planaire.

Preuve. Dans ce cas, $n = 6$ et $m = 9$; l'inégalité $m \leq 3n - 6$ est donc vérifiée. Cependant, puisque chacune des f faces de toute figure planaire représentant $K_{3,3}$ est bornée par au moins 4 courbes ($K_{3,3}$ étant biparti), on a $4f \leq 2m$. La formule d'Euler donne donc $2 = n - m + f \leq n - m + \frac{m}{2}$, c.-à-d. $m \leq 2n - 4$. Ce qui est absurde car alors $9 \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$.

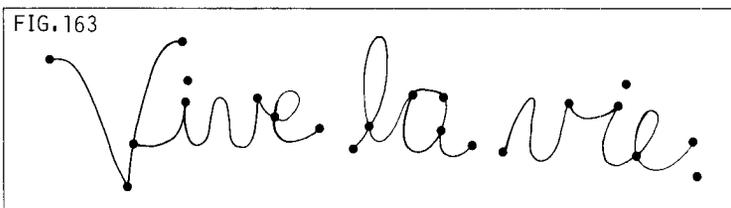
EXERCICES

132 Vérifier la formule d'Euler pour la figure planaire suivante:



133 a. Prouver que si la figure planaire F possède k composantes connexes, alors $n - m + f = k + 1$.

b. Que vaut $n - m + f$ pour la figure planaire suivante:



*134 a. Plaçons n points sur un cercle; en combien de régions ce cercle est-il subdivisé lorsqu'on trace toutes les cordes possibles entre ces n points, en supposant que les n points sont en position générale (c.-à-d. que trois de ces cordes ne sont jamais concourantes)?

b. Trouver les trois prochains termes de la suite: 1,2,4,8,16,...

135 Si $G = (X, A)$ est un graphe simple planaire, sans triangle, prouver que $m \leq 2n - 4$, où $n = |X|$ et $m = |A|$.

3 polyèdres réguliers

DEFINITION A tout polyèdre P (c.-à-d. un solide à trois dimensions borné par des faces qui sont des polygones), on peut associer un graphe simple, $G = (X, A)$, où X est l'ensemble des sommets de P et où $\{x, y\} \in A$ si et seulement si le segment $[x, y]$ est un côté de P .

DEFINITION Le polyèdre P est dit convexe si $\forall x, y \in P$ le segment $[x, y]$ est contenu dans P .

PROPOSITION Le graphe simple G associé à un polyèdre convexe P est toujours planaire.

Preuve. Choisissons un point p_0 à l'intérieur de P , (par exemple le centre de gravité de P) et une sphère S , centrée en p_0 , et de rayon suffisamment grand pour contenir entièrement P . Considérons la fonction τ de P sur S qui associe à tout point $q \in P$ l'unique point de S rencontré par la demi-droite issue de p_0 et passant par q . L'image par τ des sommets et côtés de P détermine un plongement de G sur la sphère S . Puisque G peut être plongé dans S , il est donc planaire.

PROPOSITION Soit P un polyèdre convexe ayant n sommets, m côtés et f faces. Notons s_k le nombre de sommets de degré k et f_k le nombre de faces ayant k côtés, alors $\sum_{k \geq 3} ks_k = 2m = \sum_{k \geq 3} kf_k$.

Preuve. La formule, $\sum_{k=3}^n ks_k = 2m$, n'est rien d'autre que le lemme des poignées de mains. Dans la somme $\sum kf_k$, comme chaque côté apparaît sur la frontière d'exactly deux faces, il est compté deux fois et on trouve $2m$ comme total.

COROLLAIRE Tout polyèdre convexe contient au moins un sommet de degré 3, 4 ou 5, et au moins une face ayant 3, 4 ou 5 côtés.

Preuve. Si $s_3 = s_4 = s_5 = 0$, alors $2m = \sum_{k \geq 6} ks_k \geq \sum_{k \geq 6} 6s_k = 6n$. Ceci

contredit l'inégalité, $m \leq 3n - 6$, démontrée pour les graphes planaires.

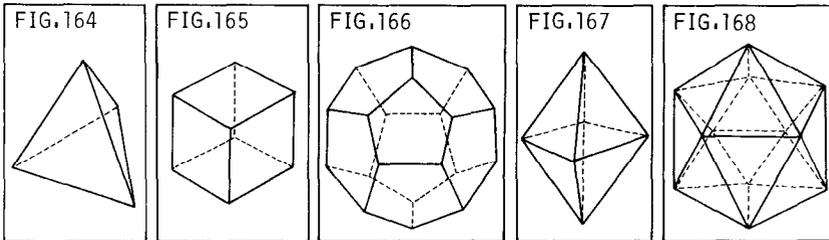
Si $f_3 = f_4 = f_5 = 0$, alors on a $2m = \sum_{k \geq 6} kf_k \geq 6f$. Comme le graphe simple associé au polyèdre est planaire, on a également $n - m + f = 2$ et $3n \leq 2m$. Ceci est absurde, car alors $2 = n - m + f \leq \frac{2}{3}m - m + \frac{1}{3}m = 0$.

DEFINITION Un polyèdre convexe est dit *régulier* si tous ses sommets sont de degré r et toutes ses faces ont s côtés.

Trouvons maintenant tous les polyèdres réguliers. Par les résultats déjà obtenus, nous savons que $r = 3, 4$ ou 5 et, $s = 3, 4$ ou 5 . De plus, $2m = n \cdot r = f \cdot s$ et $n - m + f = 2$ où, comme d'habitude, n est le nombre de sommets, m le nombre de côtés et f le nombre de faces. On en tire l'équation $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$.

Regardons les différents cas.

- I) Si $r = s = 3$, alors $n = 4$, $m = 6$ et $f = 4$. *Tétraèdre* (fig. 164).
- II) Si $r = 3$ et $s = 4$, alors $n = 8$, $m = 12$ et $f = 6$. *Cube* (fig. 165).
- III) Si $r = 3$ et $s = 5$, alors $n = 20$, $m = 30$ et $f = 12$. *Dodécaèdre* (fig. 166).
- IV) Si $r = 4$, alors $s = 3$, $n = 6$, $m = 12$ et $f = 8$. *Octaèdre* (fig. 167).
- V) Si $r = 5$, alors $s = 3$, $n = 12$, $m = 30$ et $f = 20$. *Icosaèdre* (fig. 168).



REMARQUE L'existence des cinq polyèdres réguliers est connue depuis des millénaires; ils sont souvent appelés les *solides de Platon*.

EXERCICES

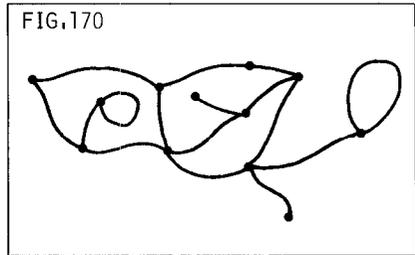
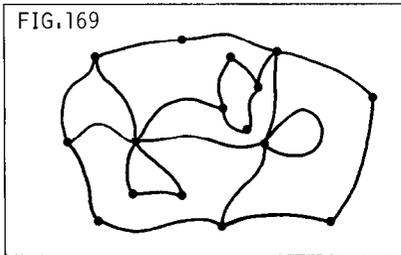
136 Soit P un des 5 polyèdres réguliers considéré comme graphe simple. Inscrire P dans une sphère S pour en construire un plongement dans S , où le pôle nord correspond au milieu d'une face. Tracer ensuite un plongement de P dans \mathbb{R}^2 par projection stéréographique.

137 Soit P un polyèdre convexe. Le dual de P s'obtient en prenant comme sommets les centres des faces de P et en joignant, par des segments, les centres des faces adjacentes. Trouver le dual de chacun des 5 polyèdres réguliers.

4 théorème des cinq couleurs

Une carte de géographie (ou carte planaire) est une figure plane connexe C dont chaque courbe est sur la frontière de deux faces et dont chaque face a pour frontière une courbe fermée obtenue en mettant bout-à-bout des courbes de C . Une face entourée de k courbes est appelée une k -face de C .

EXEMPLE Parmi les deux figures planaires suivantes, seule la première est une carte.



Le graphe simple, noté G_C , associé à la carte C , a pour sommets les faces de C , deux faces étant adjacentes si et seulement si au moins une courbe de C est sur leur frontière commune.

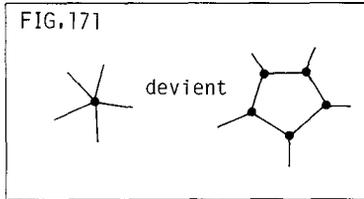
Colorier la carte C à l'aide de k couleurs, veut dire attribuer à chacune des faces une des k couleurs de sorte que deux faces adjacentes (c.-à-d. avec une frontière commune) ne soient jamais de la même couleur. Ceci revient évidemment à trouver un k -coloriage du graphe simple G_C .

THEOREME (des cinq couleurs). Toute carte peut être coloriée avec 5 couleurs.

Le reste de cette section sera consacré à la preuve classique, qui nous vient de Heawood (1890), du théorème des 5 couleurs.

Pour prouver le théorème des 5 couleurs, notons d'abord qu'il est suffisant de le prouver pour toute carte dite *régulière*, c.-à-d. sans boucle et ne possédant que des sommets de degré 3.

En effet, si $\deg p = 2$, on peut alors enlever p sans modifier le problème de coloriage. Si $\deg p > 3$, alors il suffit de "remplacer" le sommet p par une petite k -face, où $k = \deg p$ (fig. 171), pour obtenir k nouveaux sommets tous de degré 3.



Si C contient une boucle, puisqu'elle n'est "contenue que dans une face", on peut sans problème l'effacer.

En éliminant de cette façon les boucles et les sommets de degré différent de trois, on obtient une carte régulière C' . Tout 5-coloriage de C' , puisque C' contient plus de faces et les mêmes relations d'adjacence entre les anciennes faces, donne évidemment un 5-coloriage de C .

PROPOSITION Toute carte régulière C est 5-coloriable.

Preuve par récurrence sur m (le nombre de courbes de C).

Bien sûr, si m est petit, il y a moins de 5 faces, et C est évidemment 5-coloriable. Supposons donc que C soit une carte régulière, formée de m courbes et que toute carte régulière ayant moins de m courbes soit 5-coloriable.

Soit f_k , $k \geq 2$, le nombre de k -faces de C . Soit n le nombre de sommets et f le nombre de faces de C .

En comptant les faces, on trouve: $f = \sum_{k \geq 2} f_k$; en comptant les courbes et les sommets, on trouve: $2m = \sum_{k \geq 2} k f_k = 3n$. Puisque la formule d'Euler s'applique à la figure plane connexe qu'est C , on trouve:

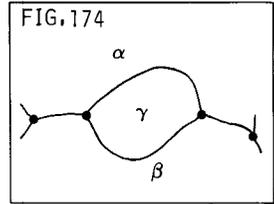
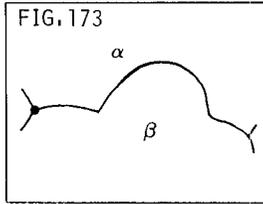
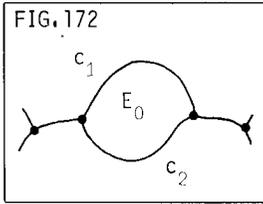
$$12 = 6f - 3(2m) + 2(3n) = 4f_2 + 3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - 2f_8 - 3f_9 - \dots$$

On en déduit donc qu'un des quatre cas: $f_2 \neq 0$, $f_3 \neq 0$, $f_4 \neq 0$ ou

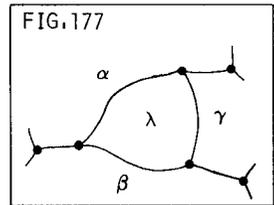
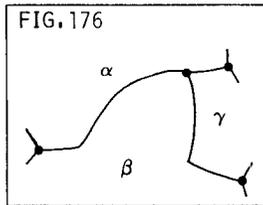
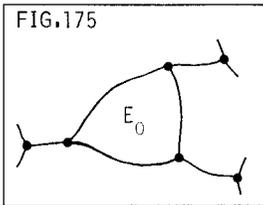
$f_5 \neq 0$, se produit nécessairement dans C . Montrons que, dans chacun de ces 4 cas, la carte C est 5-coloriable.

Notons les couleurs par des lettres grecques.

Cas I. Soit E_0 une 2-face de C , entourée par les courbes c_1 et c_2 (fig. 172). Enlevons la courbe c_2 et colorions la carte régulière C' , ayant moins de m courbes, ainsi obtenue (fig. 173). Maintenant que C' est 5-coloriée, on dispose d'une troisième couleur, pour colorier E_0 , après avoir retracé c_2 (fig. 174).



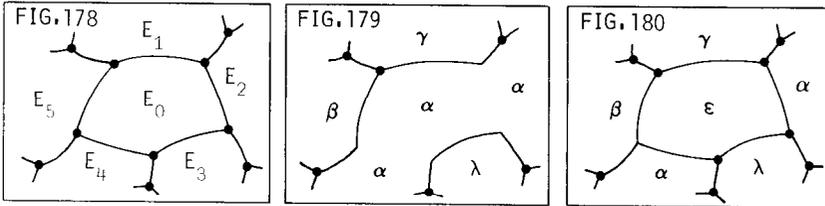
Cas II. Soit E_0 une 3-face de C (fig. 175). Comme précédemment, on efface une courbe frontière de E_0 , on colorie la carte obtenue (par hypothèse de récurrence) (fig. 176) et on replace la courbe enlevée. Comme E_0 ne touche qu'à 3 faces, on dispose alors d'une quatrième couleur pour colorier E_0 (fig. 177).



Cas III. Même chose que dans les deux cas précédents, sauf que cette fois-ci, on dispose à la fin d'une cinquième couleur pour la 4-face E_0 .

Cas IV. Ce cas est plus délicat. Soit E_0 une 5-face, et E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 , ses cinq faces adjacentes (fig. 178). Certaines de ces faces peuvent très bien être adjacentes, ou même coïncider les unes avec les autres. Nous dirons alors qu'elles se touchent. Si E_1 et E_3 se touchent, alors E_4 et E_2 ne peuvent se toucher. (Ceci résulte du théorème de Jordan). Sans perte de généralité, supposons donc que E_2 et E_4 ne se touchent pas. En d'autres mots, ce sont deux faces distinctes non-adjacentes. Effaçons la courbe c_1 qui est sur la frontière de E_0 et E_2 , et la courbe c_2 qui est sur la frontière de E_0 et E_4

(fig. 179). Colorions la carte ainsi obtenue (puisqu'elle a moins de m courbes). Lorsqu'on retrace les courbes c_1 et c_2 , puisque E_2 et E_4 ne se touchent pas, on peut les laisser toutes deux de la couleur α . On dispose alors de la cinquième couleur, disons ε , pour colorier E_0 (fig. 180).

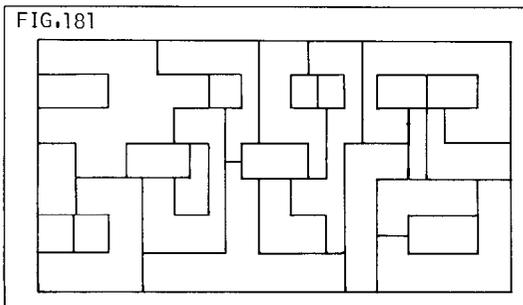


En résumé, on a ramené le problème à l'étude de quatre cas et, dans chacun de ces quatre cas, l'existence d'une 5-coloration de C a été démontrée.

REMARQUE Durant plusieurs décennies, de nombreux mathématiciens ont tenté de démontrer la célèbre conjecture des quatre couleurs: "Toute carte peut être coloriée à l'aide de 4 couleurs". En juillet 1976, K. Appel et W. Haken y sont finalement parvenus en réduisant le problème à l'étude de plusieurs milliers de cas, ensuite analysés à l'aide d'ordinateurs [15].

EXERCICES

- 138 Soit C une "carte" obtenue en traçant un nombre fini de droites dans le plan. Montrer que $\gamma(G_C) = 2$.
- 139 Prouver que quelle que soit la carte C , le graphe simple G_C est planaire.
- 140 Colorier la carte suivante avec quatre couleurs.



- 141 Partager la surface d'un tore en sept pays connexes, de sorte que chaque pays ait une frontière commune avec chacun des six autres.
- 142 Soit C une carte planaire ayant plus d'une face. Prouver que $\chi(G_C) = 2$ ssi $\forall p, d(p)$ est pair.
- 143 Soit C une carte planaire ayant plus de deux faces. Prouver que si toute face de C a pour frontière un nombre pair de courbes mises bout-à-bout alors $\chi(G_C) = 3$.
- 144 La Biosphère est l'ancien pavillon des Etats-Unis à l'exposition universelle de Montréal (1967). Prouver que, malgré les apparences, la Biosphère n'est pas uniquement composée d'hexagones.
- *145 Définissons une carte à trois dimensions comme étant une subdivision de \mathbb{R}^3 en un nombre fini de régions connexes. Colorier une région veut maintenant dire la remplir de peinture. Colorier une telle carte signifie attribuer à chaque région une couleur de sorte que deux régions ayant une surface comme frontière commune ne soient pas de la même couleur. Existe-t-il un entier N tel que toute carte à trois dimensions puisse être coloriée avec N couleurs ou moins?
- 146 Soit F un plongement d'un graphe simple connexe $G = (X, A)$ dans \mathbb{R}^2 . Prouver que le nombre cyclomatique, $\chi(G)$, est égal à $f - 1$, où f est le nombre de faces de F . En déduire la formule d'Euler pour la figure planaire F .

5

JEUX

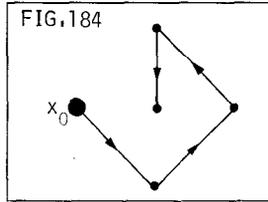
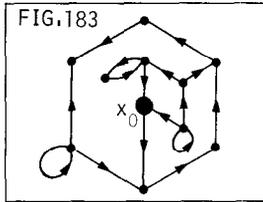
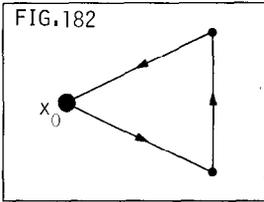
1 jeu sur un graphe orienté

Soit $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ un graphe orienté et x_0 un sommet de G .

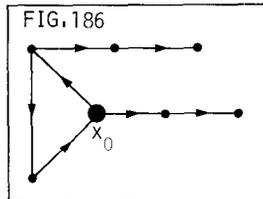
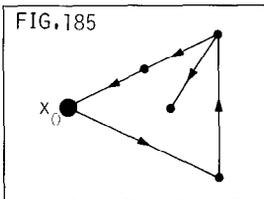
Les joueurs A et B ont décidé de faire le jeu suivant: A commence en x_0 et choisit une flèche partant de x_0 , disons (x_0, x_1) ; c'est ensuite au tour de B, et il doit choisir une flèche quelconque, partant de x_1 , disons (x_1, x_2) ; c'est ensuite au tour de A et il doit choisir une flèche partant de x_2 . Les deux joueurs jouent ainsi alternativement et se promènent sur le graphe orienté G . La suite $[x_0, x_1, x_2, \dots]$ est appelée une *partie* sur G . De deux choses l'une, ou bien la partie est une suite infinie et on dit qu'elle est *nulle*, ou bien la partie est une suite finie (en d'autres mots, un chemin $c = [x_0, x_1, \dots, x]$ de G) et on dit qu'elle est *décisive*. Dans une partie décisive, $c = [x_0, x_1, \dots, x_k = x]$, on a nécessairement $d^+(x) = \emptyset$ (c.-à-d. $\Gamma(x) = \emptyset$). De plus, si k est impair, alors le joueur A est le *gagnant* (et B le *perdant*) de la partie. Si au contraire, k est pair, alors B est le gagnant (et A le perdant). En d'autres mots, si un joueur, alors qu'il a le *trait* (c.-à-d. que c'est à lui de jouer) se trouve en un sommet x , d'où ne part aucune flèche, alors la partie est terminée et il est déclaré perdant.

Regardons quelques exemples.

EXEMPLE 1 Pour chacun des trois graphes orientés, G_1 , G_2 et G_3 , (fig. 182, 183 et 184), il n'y a qu'une partie qui est nulle, gagnée par A, et gagnée par B, respectivement.



EXEMPLE 2 Dans le graphe orienté (fig. 185), il y a une infinité de parties décisives, toutes gagnées par A, et une seule partie nulle. Dans le graphe orienté (fig. 186), il y a une infinité de parties décisives, mais A et B joueront probablement l'unique partie nulle.



EXEMPLE 3 Considérons maintenant un graphe orienté beaucoup plus complexe: celui du jeu d'échecs. Une *position* aux échecs s'obtient en plaçant quelques-unes des 32 pièces d'un jeu, dont les deux rois, et en remplaçant ensuite (pour tenir compte des promotions) certains pions blancs (noirs) par des pièces blanches (noires), autres qu'un roi blanc (noir).

Soit $X = P \times \{0,1\}$, où P est l'ensemble des positions. Le sommet $x = (p,0)$ correspond à la situation où les blancs ont le trait (c.-à-d. seule une pièce blanche peut être déplacée) dans la position p . De même, le sommet $(p,1)$ correspond à la situation où les noirs ont le trait dans la position p . On prend ensuite les flèches de $(p,0)$ à $(p',1)$ (et les flèches de $(q,1)$ à $(q',0)$) si un coup légal des blancs (des noirs) permet de passer de la position p à la position p' (de la position q à la position q'). De plus, si dans la position p (la position q) les blancs (les noirs) sont pats (c.-à-d. les blancs (les noirs) n'ont aucun coup légal mais leur roi n'est pas en échec) alors on place une boucle au sommet $(p,0)$ (au sommet $(q,1)$).

On obtient ainsi un graphe orienté, $\xi = (X,U)$, appelé le *graphe orienté du jeu d'échecs*. Posons $x_0 = (p_0,0)$, où p_0 est la position initiale du jeu d'échecs.

Jouer une partie d'échecs revient à jouer une partie sur le graphe orienté ξ en commençant en x_0 . En effet, si la partie sur ξ se termine au sommet $x = (p,0)$ (au sommet $y = (q,1)$), alors le joueur B (A) gagne, et, dans la position p (la position q), les blancs (les noirs) sont échecs et mat. De plus, si les blancs (les noirs) sont pats dans la position p (position q), et que le joueur A (joueur B) a le trait en $(p,0)$ (en $(q,1)$), alors la partie sera nulle; A et B ne pouvant ensuite que parcourir indéfiniment la boucle en $(p,0)$ (en $(q,1)$).

Les joueurs devraient également observer les trois règles suivantes: a) d'un commun accord, ils peuvent à tout moment déclarer la partie nulle; b) si un joueur dispose d'un coup le conduisant pour une troisième fois dans la partie à un même sommet, il peut, avant de faire ce coup, déclarer la partie nulle; c) si A et B jouent chacun 50 coups sans qu'il n'y ait ni capture, ni mouvement de pion, la partie est déclarée nulle.

Passons à un théorème général sur les jeux dans un graphe orienté.

PROPOSITION Soit $G = (X,U)$, $N \subseteq X$ un noyau de G et $x_0 \in X - N$. Si A et B jouent sur le graphe orienté G et A commence en x_0 , alors le joueur A a une stratégie "ne pouvant pas perdre". En d'autres mots, si A joue bien, la partie sera ou bien nulle ou bien gagnée par lui.

Preuve. Puisque N est un noyau, c'est un ensemble extérieurement stable. Le joueur A choisit donc une flèche (x_0, x_1) telle que $x_1 \in N$. Quel que soit le coup (x_1, x_2) du joueur B, (comme N est également intérieurement stable), on aura $x_2 \notin N$. A nouveau, A ramène B dans le noyau et B, ensuite, doit en sortir, et ainsi de suite. Si la partie est décisive et se termine au sommet x , comme $d^+(x) = 0$, on a $x \in N$ et B est donc le perdant.

PROPOSITION Soit $G = (X,U)$, $N \subseteq X$ un noyau de G et $x_0 \in N$. Si A et B jouent sur le graphe orienté G et A commence en x_0 , alors le joueur B a une stratégie ne pouvant pas perdre.

Preuve. Même chose que la proposition précédente.

C'est donc dire que la connaissance d'un noyau N de G permet à A de ne pas perdre, si $x_0 \notin N$, et à B de ne pas perdre, si $x_0 \in N$. Si on suppose de plus que G ne contient aucun circuit, alors toutes les parties seront décisives. Le joueur A aura donc une stratégie gagnante si

$x_0 \notin \mathbb{N}$, tandis que le joueur B aura une stratégie gagnante si, au contraire, $x_0 \in \mathbb{N}$.

Dans la section qui suit, nous utiliserons la notion de fonction de Grundy pour construire un noyau dans le graphe orienté G .

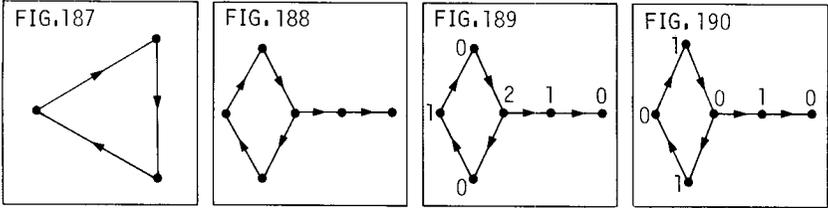
2 fonctions de Grundy

Soit $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ un graphe orienté.

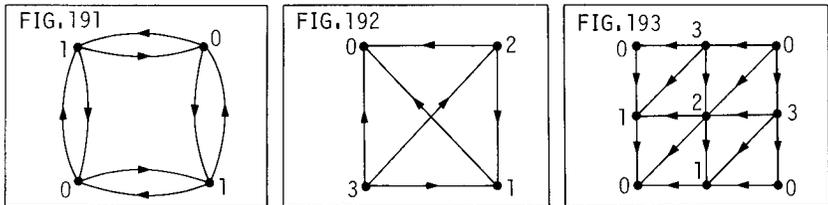
DEFINITION On appelle une fonction $g: X \rightarrow \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ fonction de Grundy de G si $\forall x \in X$, $g(x)$ est le plus petit entier n'apparaissant pas dans $\{g(y) \mid y \in \Gamma(x)\}$, c.-à-d. $g(x) = \min(\mathbb{N} - g(\Gamma(x)))$.

EXEMPLE 1 Le graphe orienté de la figure 187 ne possède aucune fonction de Grundy.

EXEMPLE 2 Le graphe orienté de la figure 188 possède deux fonctions de Grundy décrites par les figures 189 et 190.



EXEMPLE 3 Les figures 191, 192 et 193 représentent trois fonctions de Grundy.

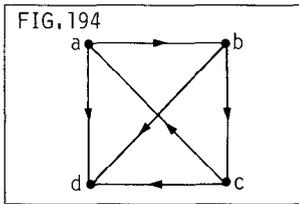


REMARQUE Soit g une fonction de Grundy, sur le graphe orienté $G = (X, \Gamma)$, alors il suit de la définition que:

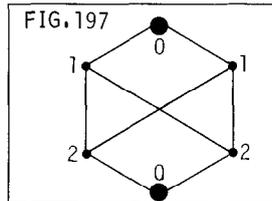
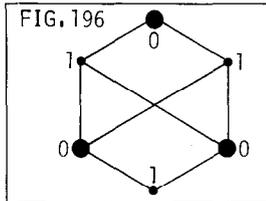
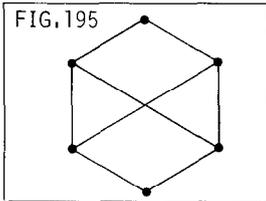
- i) G ne contient aucune boucle,
- ii) $g(x) = 0 \iff ((\Gamma(x) = \emptyset) \text{ ou } (\forall y \in \Gamma(x), g(y) \geq 1))$.
- iii) si $g(x) = k$, alors $\forall y \in \Gamma(x), g(y) \neq k$,
- iv) si $g(x) = k > 0$, alors $\forall 0 \leq j < k, \exists y \in \Gamma(x)$ tel que $g(y) = j$.

PROPOSITION Soit g une fonction de Grundy, sur le graphe orienté G , et soit $S = \{x \in X | g(x) = 0\} = g^{-1}\{0\}$. Alors S est un noyau de G .

Preuve. Par iii) de la remarque précédente. Si $x \in S$ et $y \in \Gamma(x)$, alors $g(y) \neq 0$ et $y \notin S$. L'ensemble S est donc intérieurement stable. De plus, si $x \notin S$, alors $g(x) = k > 0$ et, par iv) de la remarque précédente, $\exists y \in \Gamma(x)$ tel que $g(y) = 0$, c.-à-d. $y \in S$. L'ensemble S est donc également extérieurement stable.

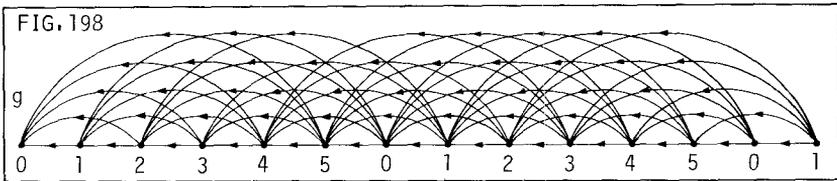


REMARQUE Si $S = g^{-1}\{0\}$, pour une fonction de Grundy g , alors on appelle S un *noyau de Grundy*. Il est facile de voir que le graphe orienté de la figure 194 n'admet aucune fonction de Grundy, mais possède un noyau, $\{d\}$. Noter que le graphe simple (fig. 195), considéré comme graphe orienté symétrique, possède deux noyaux de Grundy (fig. 196 et 197).



En présence d'un jeu, les adversaires A et B chercheront donc à construire une fonction de Grundy g sur le graphe orienté G dont les sommets sont les positions pouvant se produire et les flèches, les coups permis par les règles du jeu. Si la position initiale x_0 (où A doit commencer) est à l'extérieur du noyau $g^{-1}\{0\}$, alors A n'a pas de problème; si au contraire $x_0 \in g^{-1}\{0\}$, alors le joueur A va avoir des ennuis.

Considérons un exemple très simple. Il y a une pile contenant n allumettes et, chacun leur tour, les joueurs A et B (comme toujours, A commence) enlèvent 1, 2, 3, 4 ou 5 allumettes de la pile. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette. Associons à ce jeu le graphe orienté $H_n = (X, U)$, où $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ et $(k, \ell) \in U$ si et seulement si $1 \leq k - \ell \leq 5$. Le sommet k correspond évidemment à la situation où il y a k allumettes dans la pile, et la flèche (k, ℓ) correspond au coup qui consiste à enlever $k - \ell$ allumettes de la pile. Il est facile de trouver une fonction de Grundy sur H_n . Par exemple, la figure 198 décrit le graphe orienté H_{13} et son unique fonction de Grundy.



En général, la fonction $g: \{0, 1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{N}$, définie par $g(m) = r$, où r est le reste de la division de m par 6, est l'unique fonction de Grundy sur H_n . Son noyau est $S = \{m \mid m \text{ est un multiple de } 6\}$.

Si 6 ne divise pas n , alors $x_0 = n \notin S$, et le joueur A possède une stratégie gagnante. Elle consiste à prendre d'abord r allumettes, où $n = 6q + r, 1 \leq r \leq 5$, et à ensuite en prendre $6 - i$ si B en a pris i . De cette façon, comme B, lorsqu'il a le trait, est toujours dans le noyau, c'est lui qui aboutira au sommet 0 (l'unique sommet x pour lequel $\Gamma(x) = \emptyset$). Si 6 divise n , alors c'est plutôt B qui a une stratégie gagnante qui consiste à prendre $6 - i$ allumettes après que A en a pris i .

3 application au jeu de Nim

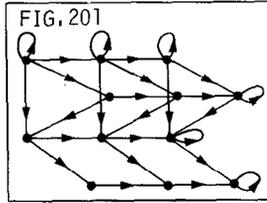
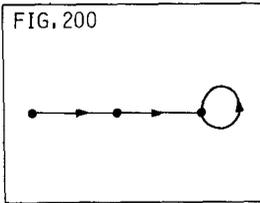
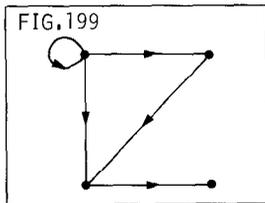
Nous introduisons la notion de somme cartésienne, $G_1 + G_2$, de deux graphes orientés G_1 et G_2 , et montrons comment construire une fonction de Grundy sur $G_1 + G_2$, à partir de fonctions de Grundy sur G_1 et G_2 . Ce résultat est ensuite utilisé pour étudier le jeu de Nim.

DEFINITION Soit $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ et $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ deux graphes orientés,

où Γ_1 et Γ_2 sont des fonctions multivoques. La somme cartésienne, notée $G_1 + G_2$, est le graphe orienté $G_1 + G_2 = (X_1 \times X_2, \Gamma)$, où la fonction multivoque Γ est définie par:

$$\Gamma(x_1, x_2) = (\{x_1\} \times \Gamma_2(x_2)) \cup (\Gamma_1(x_1) \times \{x_2\}).$$

EXEMPLE Si G_1 et G_2 sont décrits par les figures 199 et 200, alors $G_1 + G_2$ est décrit par la figure 201.



DEFINITION Soit n et m deux entiers naturels; la somme digitale, notée $n \dot{+} m$, s'obtient en écrivant en base 2 les entiers n et m et en additionnant les chiffres correspondant modulo 2.

Noter que $(\mathbb{N}, \dot{+})$ est un groupe abélien où $\forall p \in \mathbb{N}, p \dot{+} p = 0$.

EXEMPLE Si $n = 19 = (1,0,0,1,1)$ et $m = 47 = (1,0,1,1,1,1)$, alors $n \dot{+} m = (1,1,1,1,0,0) = 60$.

THEOREME Si $g_1: X_1 \rightarrow \mathbb{N}$ et $g_2: X_2 \rightarrow \mathbb{N}$ sont des fonctions de Grundy sur les graphes orientés $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ et $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$, alors $g: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{N}$, définie par $g(x_1, x_2) = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2)$, est une fonction de Grundy du graphe orienté $G_1 + G_2$.

Preuve. Supposons que $g(x_1, x_2) = p$. Soit $(x'_1, x'_2) \in \Gamma(x_1, x_2)$. Si $x_1 = x'_1$ et $x_2 = \Gamma_2(x_2)$, alors $g_2(x'_2) \neq g_2(x_2)$ et donc $g(x'_1, x'_2) = g_1(x'_1) \dot{+} g_2(x'_2) \neq g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2) = g(x_1, x_2)$. De même, si $x'_1 \in \Gamma_1(x_1)$ et $x_2 = x'_2$, alors $g(x'_1, x'_2) \neq g(x_1, x_2)$. Soit $0 \leq q < p$. Utilisons la notation $[n]_i$ pour le coefficient de 2^i dans l'expression binaire de n . Soit $k = \max \{i \mid [p]_i \neq [q]_i\}$ et r tel que $q \dot{+} r = p$. En fait, on a $r = \sum_{i \in I} 2^i$, où $I = \{0 \leq j \leq k \mid [p]_j \neq [q]_j\}$.

Comme $p = g_1(x_1) \dot{+} g_2(x_2)$, supposons donc, sans perte de généralité, que $[g_1(x_1)]_k = 1$ et $[g_2(x_2)]_k = 0$. Alors, on a $g_1(x_1) \dot{+} r < g_1(x_1)$, puisque $[g_1(x_1) \dot{+} r]_k = 1 \dot{+} 1 = 0$, $[g_1(x_1)]_k = 1$, et $[g_1(x_1) \dot{+} r]_i = [g_1(x_1)]_i$, pour $i > k$.

Soit $x'_1 \in \Gamma_1(x_1)$ tel que $g_1(x'_1) = g_1(x_1) \dot{+} r$ (car $g_1: X_1 \rightarrow \mathbf{N}$ est une fonction de Grundy). On a donc $(x'_1, x_2) \in \Gamma(x_1, x_2)$ tel que $g(x'_1, x_2) = g_1(x'_1) \dot{+} g_2(x_2) = g_1(x_1) \dot{+} r \dot{+} g_2(x_2) = p \dot{+} r = q \dot{+} r \dot{+} r = q$.

La fonction $g: X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbf{N}$ est donc une fonction de Grundy.

Plusieurs jeux sont de type Nim dont le plus populaire est le jeu de Fan Tan.

Dans le jeu de Fan Tan, il y a k piles contenant respectivement n_1, n_2, \dots, n_k allumettes. A tour de rôle, les joueurs enlèvent un nombre non-nul d'allumettes dans une même pile. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.

Un autre jeu de Nim, appelé jeu de Marienbad, se joue de la même façon sauf que le perdant est celui qui prend la dernière allumette.

Examinons le jeu de Fan Tan.

Considérons le graphe orienté $G = (X, \Gamma)$, où $X = \{(m_1, m_2, \dots, m_k) \mid \forall i \leq k, 0 \leq m_i \leq n_i\}$, et où il y a une flèche de (m_1, m_2, \dots, m_k) à $(m'_1, m'_2, \dots, m'_k)$ si et seulement si $m_i = m'_i$, sauf pour un indice i_0 où $m'_{i_0} < m_{i_0}$. Bien sûr, le sommet (m_1, m_2, \dots, m_k) correspond à la situation où il y a m_i allumettes dans la i ème pile. La flèche de (m_1, m_2, \dots, m_k) à $(m'_1, m'_2, \dots, m'_k)$ correspond au coup qui consiste à enlever $m_{i_0} - m'_{i_0}$ allumettes de la i_0 ème pile. Noter que jouer au jeu de Fan Tan revient à jouer sur le graphe orienté G , en commençant au sommet (n_1, n_2, \dots, n_k) . De plus, le graphe orienté G n'est rien d'autre que la somme cartésienne des graphes orientés $G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_k}$, où G_n correspond au jeu de Fan Tan avec une seule pile, contenant n allumettes. Plus précisément, l'ensemble des sommets de G_n est $\{0, 1, \dots, n\}$ et il y a une flèche de k à ℓ , exactement si $0 \leq \ell < k \leq n$. Bien sûr, la fonction $g_n: \{0, 1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbf{N}$ définie par $g_n(k) = k, \forall 0 \leq k \leq n$, est une fonction de Grundy sur G_n . Le noyau de Grundy correspondant est $\{0\}$. La stratégie gagnante pour A , si $n > 0$, est très simple: comme premier coup, il prend toutes les allumettes de l'unique pile et gagne automatiquement.

Pour le graphe orienté $G = G_{n_1} + G_{n_2} + \dots + G_{n_k}$, le théorème précédent nous donne la fonction de Grundy, $g: X \rightarrow \mathbf{N}$, définie par

$$\begin{aligned} g(m_1, m_2, \dots, m_k) &= g_{n_1}(m_1) \dot{+} g_{n_2}(m_2) \dot{+} \dots \dot{+} g_{n_k}(m_k), \\ &= m_1 \dot{+} m_2 \dot{+} \dots \dot{+} m_k. \end{aligned}$$

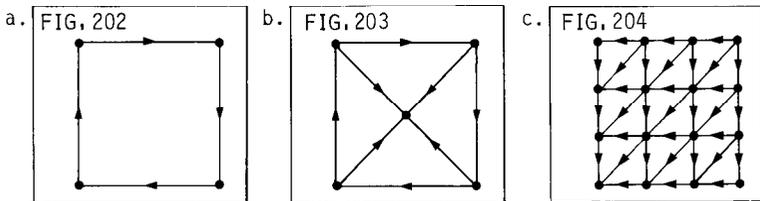
Dans le jeu de Fan Tan avec k piles contenant respectivement n_1, n_2, \dots, n_k allumettes, le joueur A a une stratégie gagnante (qui consiste à toujours entraîner son adversaire dans le noyau) si

$n_1 \mp n_2 \mp \dots \mp n_k \neq 0$. Si, au contraire, $n_1 \mp n_2 \mp \dots \mp n_k = 0$, alors c'est B qui aura une stratégie gagnante.

EXERCICES

147 Jouer une partie de Fan Tan, où $k = 4$, $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 6$ et $n_4 = 10$.

148 Trouver une fonction de Grundy pour chacun des graphes orientés suivants:



149 Tracer le graphe orienté du jeu de Fan Tan où $k = 2$, $n_1 = 4$ et $n_2 = 2$, et trouver sa fonction de Grundy.

150 Soit G et H deux graphes orientés; prouver que leur somme cartésienne $G + H$ admet un circuit eulérien (c.-à-d. un circuit passant par chaque flèche une et une seule fois) si et seulement si G et H sont eulériens.

151 Trouver toutes les fonctions de Grundy des graphes simples suivants:

a. K_n b. $K_{p,q}$ c. C_6 .

152 Prouver que quelle que soit la façon d'orienter les arêtes du graphe simple C_{2k+1} , on obtient un graphe orienté n'admettant aucune fonction de Grundy.

153 a. Considérons le jeu suivant entre deux joueurs A et B:

il y a deux tas de respectivement n et m allumettes; le joueur A commence et, à tour de rôle, les joueurs enlèvent, ou bien 1, 2 ou 3 allumettes dans le tas de gauche, ou bien

1, 2, 3 ou 4 allumettes dans le tas de droite. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette. Trouver une fonction de Grundy pour ce jeu et décrire son noyau. En fonction de n et m , qui a une position gagnante et quelle est-elle?

- b. Même jeu qu'en a. sauf que cette fois les joueurs peuvent aussi enlever k allumettes dans chacune des deux piles simultanément, où $k = 1$ ou 2 .

*154 (Problème réservé aux amateurs d'échecs).

Dans le graphe orienté ξ du jeu d'échecs, trouver la distance entre le sommet $x_0 = (p_0, 0)$, où p_0 est la position initiale, et le sommet suivant:

- a. $x = (p, 0)$ où, dans la position p , les deux cavaliers du roi sont disparus et le pion dame est en $d5$.
- b. $x = (p, 0)$ où, dans la position p , les quatre cavaliers sont disparus et le pion dame est en $d5$.
- c. x est le sommet le plus près qui a une boucle.
- d. x est le sommet le plus près qui a une boucle et où la position contient 32 pièces.

*155 Dans le jeu d'échecs à deux coups, c.-à-d. le jeu où à tour de rôle, chacun joue deux coups consécutifs légaux (donc aucun échec au premier coup), prouver que le joueur B ne peut pas avoir une stratégie gagnante.

156 Dans le graphe orienté $\xi = (X, U) = (X, \Gamma)$ du jeu d'échecs, un sommet x est dit réalisable s'il peut se produire dans une partie d'échecs (c.-à-d. si $x \in \hat{\Gamma}(x_0)$). Prouver que le sommet $(p_0, 1)$ n'est pas réalisable.

- ***157 a. Trouver un noyau dans le graphe orienté ξ du jeu d'échecs.
- b. Utiliser le résultat de a. pour devenir champion du monde aux échecs.



APPENDICE

notations et définitions sur les ensembles

Un *ensemble* est une collection d'objets. Par exemple: $\{1,2,3\}$, $\{n|n^2 = 4\}$, $\{x|x \text{ est un nombre réel et } x > 1\}$.

Si X est un ensemble et x un des objets formant X , alors on dit que x est un *élément* de X (ou que x *appartient* à X ; ou que X *contient* x) et on écrit $x \in X$. Dans le cas contraire, on écrit $x \notin X$. Le nombre d'éléments de X est noté $|X|$.

Il existe un ensemble, noté \emptyset , ne contenant aucun élément. On l'appelle l'*ensemble vide*.

Si X et Y sont des ensembles tels que tout élément de X est aussi un élément de Y , alors on dit que X est un *sous-ensemble* (ou une *partie*) de Y , et on écrit $X \subseteq Y$.

Notons $\mathcal{P}(X)$ l'*ensemble des parties* de X et $\mathcal{P}_k(X)$ l'ensemble des parties de X ayant k éléments. On a donc $\mathcal{P}(X) = \{A|A \subseteq X\}$ et $\mathcal{P}_k(X) = \{A|A \subseteq X \text{ et } |A| = k\}$.

Deux ensembles X et Y sont égaux s'ils ont les mêmes éléments (autrement dit, si $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$). On écrit $X \subset Y$ si $X \subseteq Y$ et $X \neq Y$; on dit alors que X est un *sous-ensemble strict* de Y .

Soit X et Y deux ensembles. On appelle l'ensemble formé des éléments de X et des éléments de Y , noté $X \cup Y$, la *réunion* de X et Y . L'ensemble formé des éléments étant à la fois dans X et dans Y , noté $X \cap Y$, est appelé l'*intersection* de X et Y . Si $X \cap Y \neq \emptyset$, on dit que X et Y *se coupent*. Si $X \cap Y = \emptyset$, on dit que X et Y sont *disjoints*. De plus, l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y est noté $X - Y$.

Nous utiliserons souvent les symboles logiques suivants:

la *conjonction* " \wedge " signifiant "et",

la *disjonction* " \vee " signifiant "ou",

l'*implication* " \Rightarrow " signifiant "si... alors...",

l'*équivalence* " \Leftrightarrow " signifiant "... si et seulement si ...",

le *quantificateur universel* " $\forall x$ " signifiant "pour tout x on a ...",

le *quantificateur existentiel* " $\exists x$ " signifiant "il existe x tel que ...".

Par exemple, on a:

$$(X \subseteq Y) \Leftrightarrow (\forall x)((x \in X) \Rightarrow (x \in Y))$$

$$(X = Y) \Leftrightarrow ((X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X))$$

$$\forall x, (x \in X \cup Y) \Leftrightarrow (x \in X) \vee (x \in Y)$$

$$\forall x, (x \in X \cap Y) \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \in Y)$$

$$\forall x, (x \in X - Y) \Leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \notin Y).$$

Soit x et y deux objets. Le *couple ordonné*, noté (x, y) , est l'objet mathématique formé de l'objet x suivi de l'objet y . On dit que x est la *première composante* (et y la *seconde composante*) du couple (x, y) . Deux couples, (x, y) et (x', y') , sont égaux si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.

Soit X et Y deux ensembles. Le *produit cartésien*, noté $X \times Y$, est l'ensemble de tous les couples ordonnés dont la première composante est dans X et la seconde est dans Y (c.-à-d. $X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ et } y \in Y\}$).

Une *relation* R de X à Y est un sous-ensemble de $X \times Y$. Si $X = Y$, on dit que R est une *relation sur* X .

Soit R une relation sur X , alors:

$$R \text{ est réflexive si: } x \in X \Rightarrow (x, x) \in R$$

$$R \text{ est symétrique si: } (x, x') \in R \Rightarrow (x', x) \in R$$

$$R \text{ est transitive si: } (x, x') \in R \text{ et } (x', x'') \in R \Rightarrow (x, x'') \in R$$

$$R \text{ est antisymétrique si: } (x, x') \in R \text{ et } (x', x) \in R \Rightarrow x = x'.$$

On dit que R est une *relation d'ordre* sur X si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

On dit que R est une *relation d'équivalence* sur X si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Soit R une relation d'ordre sur X . On écrit souvent $x \leq x'$ au lieu de $(x, x') \in R$. Si $x \leq x'$ et $x \neq x'$, alors on écrit $x < x'$. On dit que x est un *élément maximal* de $A \subseteq X$ si $x \in A$ et s'il n'existe aucun x' , dans A , tel que $x < x'$. On dit que x est l'*élément maximum* de $A \subseteq X$ (ou le *plus grand élément* de A) si $x \in A$ et $\forall a \in A, a \leq x$.

Soit R une relation d'équivalence sur X . Pour $x \in X$, notons $[x]$, la *classe d'équivalence* de x , définie par $[x] = \{x' \in X | (x, x') \in R\}$. Il est facile de voir que:

$$(1) (x, y) \in R \Leftrightarrow [x] = [y]$$

$$(2) (x, y) \notin R \Leftrightarrow [x] \cap [y] = \emptyset \Leftrightarrow [x] \neq [y].$$

Autrement dit, deux classes d'équivalence différentes sont toujours disjointes. L'ensemble des classes d'équivalence de R , noté X/R , est appelé l'ensemble quotient de X par R , c.-à-d. $X/R = \{[x] | x \in X\}$. Un système de représentants de R est un sous-ensemble de X formé en prenant exactement un élément dans chaque classe d'équivalence. Autrement dit, $A \subseteq X$ est un système de représentants de R si $\forall x \in X, \exists$ un et un seul $a \in A$ tel que $(x,a) \in R$, c.-à-d. $\forall [x] \in X/R, [x] \cap A$ n'a qu'un seul élément.

On appelle une relation f de X à Y une fonction de X à Y si, $\forall x \in X$, il existe un et un seul y , noté $f(x)$, tel que $(x,y) \in f$. On dit que $f(x)$ est l'image de x par f . Intuitivement, une fonction f de X à Y est une "règle" permettant d'associer à tout élément x de X un et un seul élément y de Y .

Soit f une fonction de X à Y (on écrit souvent $f: X \rightarrow Y$), alors:

- (1) f est injective si $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
- (2) f est surjective si $\forall y \in Y, \exists x \in X$ avec $f(x) = y$;
- (3) f est bijective si elle est injective et surjective.

De plus, si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$, alors l'image de A par f , notée $f(A)$, et l'image inverse de B par f , notée $f^{-1}(B)$, sont les ensembles définis par:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} \subseteq Y, \quad f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \subseteq X.$$

Si $f: X \rightarrow Y$ et $g: Y \rightarrow Z$ sont deux fonctions, alors leur composition, notée $g \circ f$, est la fonction de X à Z définie par: $\forall x \in X, (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Il est facile de voir que $f: X \rightarrow Y$ est bijective si et seulement si $\exists g: Y \rightarrow X$ telle que $g \circ f = 1_X$ et $f \circ g = 1_Y$, où $1_X: X \rightarrow X$ et $1_Y: Y \rightarrow Y$ sont les fonctions identités, définies par: $1_X(x) = x, \forall x \in X$, et $1_Y(y) = y, \forall y \in Y$.

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels, c.-à-d. $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$,

\mathbb{Z} l'ensemble de tous les entiers, c.-à-d. $\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

\mathbb{R} l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ et $\mathbb{R}_+^* = (0,\infty)$.

Une distance d sur un ensemble X est une fonction, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, telle que:

- 1) $\forall x, \forall y, d(x,y) \geq 0$,
- 2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- 3) $\forall x, \forall y, d(x,y) = d(y,x)$, et
- 4) $\forall x, \forall y, \forall z, d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$.

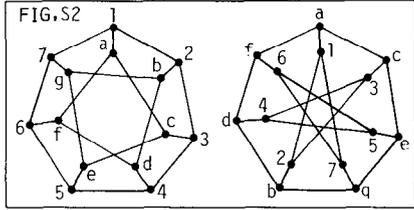
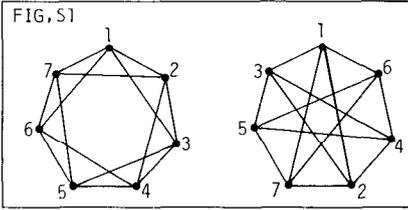
La dernière condition est appelée l'inégalité du triangle.

B

SOLUTIONS AUX EXERCICES

- 1 Appliquer le lemme des poignées de mains. Réponses: 168, 728, 210, 280, 448.
- 2 On considère le graphe simple $G = (X, A)$ où $X = \{\text{personnes}\}$ et $\{x, y\} \in A \Leftrightarrow x$ et y sont amis. Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in X$ tels que $d(x_0) = d(x_1)$ (pourquoi?) et alors x_0 et x_1 ont le même nombre d'amis.
- 3 Il y en a 12. Voici, par exemple, les 4 homomorphismes pour lesquels $b \mapsto 1$:
 $\begin{pmatrix} abc \\ 213 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ 312 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ 212 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ 313 \end{pmatrix}.$
- 4 Pour $n > 1$, un isomorphisme $f: E_n \rightarrow K_{1,n}$, puisqu'il préserve le degré, doit être tel que $f(0) = x_1$. Il y en a donc $n!$ puisque la bijection entre $\{1, 2, \dots, n\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ est ensuite arbitraire. Pour $n = 1$, il y a 2 isomorphismes.
- 5 Toute arête $\{x, y\}$ de G détermine deux homomorphismes, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ y & x \end{pmatrix}$, de K_2 à G . Il y a donc en tout $2 \cdot |A|$ homomorphismes de K_2 à G .
- 6 Si n est impair, aucun homomorphisme de C_n à K_2 . Si $n = 2k$ est pair, il y en a deux, f et g , définis par $f\{1, 3, \dots, 2k-1\} = \{1\}$, $f\{2, 4, \dots, 2k\} = \{2\}$ et $g = \tau \circ f$ où $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les m^n fonctions de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, m\}$ sont autant d'homomorphismes de D_n à K_m . Si $m > 1$, il n'y a pas d'homomorphisme de K_m à D_n . Si $m = 1$, il y en a n .
- 7 Puisque K_{n+1} est régulier de degré n , il a $\frac{1}{2}n(n+1)$ arêtes. D'autre part, n arêtes sont incidentes au sommet 1, $n-1$ nouvelles arêtes sont incidentes au sommet 2, ... ce qui donne un total de $n + (n-1) + \dots + 1$ arêtes.

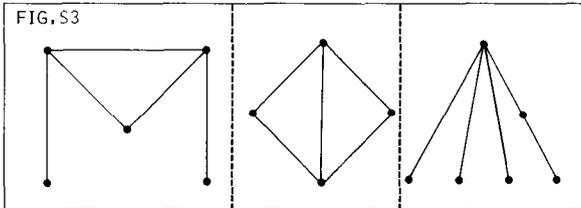
- 8 a. oui (fig. S1) b. oui c. non d. non e. oui (fig. S2)



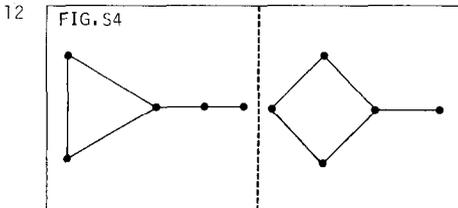
9 Il y en a respectivement 1, 2, 8 et 64, se partageant en 1, 2, 4 et 11 classes d'isomorphie respectivement.

10 Bien sûr B_n a 2^n sommets. Comme il est régulier de degré n , il admet donc $\frac{1}{2} 2^n \cdot n = n2^{n-1}$ arêtes. On peut également poser $a_n =$ nombre d'arêtes dans B_n . On a $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ car B_n s'obtient de B_{n-1} en prenant deux copies de B_{n-1} et en joignant les sommets (au nombre de 2^{n-1}) correspondants. On en tire $a_n = 2^2 a_{n-2} + 2^{n-1} + 2^{n-1} = \dots = 2^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + 2^{n-1} = n2^{n-1}$.

11 Les suites a, c et d sont graphiques comme le montre la figure S3.



La suite b ne l'est pas puisqu'étant d'ordre 4, le graphe simple cherché aurait deux sommets reliés à tous les autres et donc aucun sommet de degré 1. La suite e n'est pas graphique puisqu'il y aurait 5 (impair) sommets de degré impair. La suite f n'est pas graphique puisqu'au moins 3 des sommets de degré un devraient être reliés au sommet de degré 5 et qu'au moins un de ceux-ci devrait être également relié au sommet de degré 4. Remarquons qu'il existe une bonne caractérisation des suites graphiques, due à Erdős-Gallai (voir III page 110).

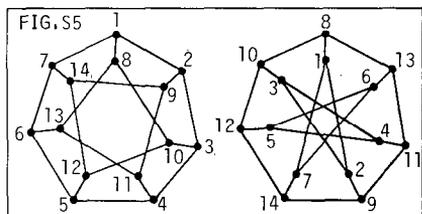


13 Soit X l'ensemble des associations. Considérons le graphe $G = (X, \rho_2(X))$ complet sur X . Comme $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists$ une et une seule personne \underline{a} qui soit le membre commun de x et y , baptisons l'arête $\{x, y\}$ du nom de \underline{a} . Comme

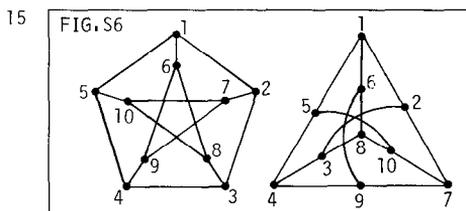
chaque personne est membre d'exactly deux associations, on peut identifier l'ensemble des arêtes $\mathcal{P}_2(X)$ à l'ensemble A des personnes. Comme chaque association a exactement trois membres, G est régulier de degré 3, c.-à-d. $G \approx K_n$ et K_n est régulier de degré 3. Donc $n = 4$ et $m = |\mathcal{P}_2(X)| = 6$. Soit $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, alors les associations sont $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_4, a_6\}$, $\{a_2, a_4, a_5\}$ et $\{a_3, a_5, a_6\}$, par exemple.

14 Les parties a. et b. découlent directement de la définition.

c. Si $r \cdot s \equiv \pm 1 \pmod n$, alors $(r, n) = 1$ et $(s, n) = 1$, c.-à-d. n est premier avec r et avec s. Les sommets y_i de chacun des graphes $P(n, r)$ et $P(n, s)$ forment donc un cycle de longueur n (dit cycle intérieur). Soit $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ et $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ les sommets de $P(n, r)$ et $P(n, s)$. Envoyons le cycle extérieur de $P(n, r)$ sur le cycle intérieur de $P(n, s)$ et le cycle intérieur de $P(n, r)$ sur le cycle extérieur de $P(n, s)$, c.-à-d. posons $\psi(x_1) = y'_1, \psi(x_2) = y'_{1+s}, \psi(x_3) = y'_{1+2s}, \dots$ et $\psi(y_1) = x'_1, \psi(y_{1+r}) = x'_2, \dots$. Si $r \cdot s \equiv 1 \pmod n$, ψ sera un isomorphisme. Pour $r \cdot s \equiv -1 \pmod n$, on devra plutôt définir $\psi: P(n, r) \rightarrow P(n, s)$ par: $\psi(x_i) = y'_{1+is}, i = 1, 2, \dots, n$ et $\psi(y_1) = x'_1, \psi(y_{1+r}) = x'_{n-1}, \psi(y_{1+2r}) = x'_{n-2}, \dots$. Par exemple, appliquons cette construction aux graphes simples $P(7, 2)$ et $P(7, 3)$ pour lesquels $r \cdot s \equiv -1 \pmod 7$. Si on numérote de 1 à 14 les sommets de $P(7, 2)$ et de $P(7, 3)$, en prenant soin d'étiqueter du même indice les sommets z et $\psi(z)$, on obtient la représentation suivante de l'isomorphisme

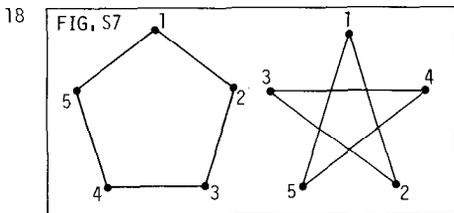


$\psi: P(7, 2) \rightarrow P(7, 3)$ ainsi construit. (voir [24].)

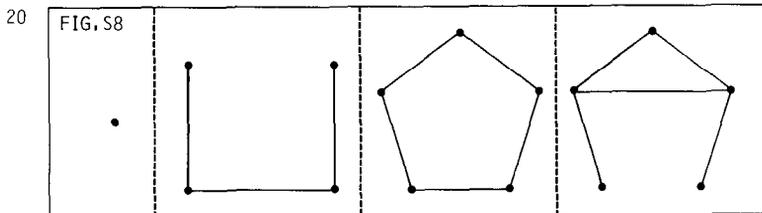


16 Pour un sommet quelconque x d'un graphe simple $G = (X, A)$ d'ordre n, on a toujours $d_G(x) + d_{\bar{G}}(x) = n - 1$. En effet les deux ensembles $\{y | x \neq y \text{ et } \{x, y\} \in A\}$ et $\{y | x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin A\}$ sont disjoints et de réunion égale à $\{y \in X | y \neq x\}$. Puisque ces 3 ensembles sont de cardinalité $d_G(x)$, $d_{\bar{G}}(x)$ et $n - 1$, respectivement, on obtient la formule. Si $\forall x \in X, d_G(x) = r$, alors $\forall x \in X, d_{\bar{G}}(x) = n - r - 1$, c.-à-d. G régulier de degré r $\Rightarrow \bar{G}$ régulier de degré $n - r - 1$.

17 Soit $G_1 = (X_1, A_1)$ et $G_2 = (X_2, A_2)$. Si $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ est un isomorphisme, alors $\psi: X_1 \rightarrow X_2$ est une bijection telle que $\{x, y\} \in A_1 \iff \{\psi(x), \psi(y)\} \in A_2$; on a donc $\{x, y\} \notin A_1 \iff \{\psi(x), \psi(y)\} \notin A_2$, c.-à-d. $\{x, y\}$ est une arête de $\bar{G}_1 \iff \{\psi(x), \psi(y)\}$ est une arête de \bar{G}_2 . La même bijection ψ est donc un isomorphisme entre \bar{G}_1 et \bar{G}_2 . De même si $\Psi: \bar{G}_1 \rightarrow \bar{G}_2$ est un isomorphisme, alors Ψ est également un isomorphisme entre \bar{G}_1 et \bar{G}_2 , or $\bar{G}_1 = G_1$ et $\bar{G}_2 = G_2$.



19 Soit $G = (X, A)$, $|G| = n$, $\bar{G} = (X, \varphi_2(X) - A)$. Si G est auto-complémentaire, alors $|A| = |\varphi_2(X) - A|$; donc $|\varphi_2(X)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 2|A|$. D'où l'on tire que $|A| = \frac{1}{4}n(n-1)$ est un entier. Puisque n et $n-1$ ne peuvent pas tous deux être pairs, on en déduit que 4 divise n ou 4 divise $n-1$, c.-à-d. n est un multiple de 4 ou un multiple de 4 plus 1.

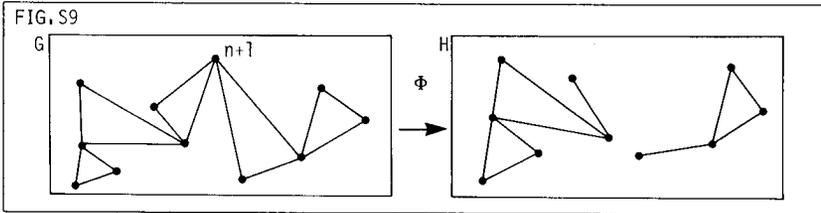


21 On a $K_n - x = K_Y$, où $Y = \{1, 2, \dots, n\} - \{x\}$, et $K_{n-1} = K_Z$, où $Z = \{1, 2, \dots, n-1\}$. De plus, chacune des $(n-1)!$ bijections entre Y et Z est un isomorphisme entre K_Y et K_Z . Soit $x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_q$ les sommets de $K_{p,q}$, où $p > 1$ et $q \geq 1$, et $x'_1, x'_2, \dots, x'_{p-1}, y'_1, y'_2, \dots, y'_q$ les sommets de $K_{p-1,q}$, alors la bijection $x_1 \rightarrow x'_1, x_2 \rightarrow x'_2, \dots, x_{i-1} \rightarrow x'_{i-1}, x_{i+1} \rightarrow x'_i, x_{i+2} \rightarrow x'_{i+1}, \dots, x_p \rightarrow x'_{p-1}, 1 \leq j \leq q, y_j \rightarrow y'_j$, est un isomorphisme entre $K_{p,q} - x_i$ et $K_{p-1,q}$. Si $p = 1$, la bijection $y_1 \rightarrow 1, y_2 \rightarrow 2, \dots, y_q \rightarrow q$, entre $\{y_j | 1 \leq j \leq q\}$ et $\{1, 2, \dots, q\}$ est évidemment un isomorphisme puisque $K_{1,q} - x_1 = D_q$, où $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$, et D_q sont deux graphes discrets d'ordre q .

22 Soit $X = \{1, 2, \dots, n\}$. On a $|X| = n$, $|\varphi_2(X)| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ et $|\varphi(\varphi_2(X))| = 2^{\binom{n}{2}}$. Puisque toute partie A de $\varphi_2(X)$ détermine un unique graphe simple, $G = (X, A)$, ayant $X = \{1, 2, \dots, n\}$ comme ensemble de sommets et qu'inversement tout graphe simple sur X détermine un unique sous-ensemble de $\varphi_2(X)$, il y a $2^{\binom{n}{2}}$ graphes simples distincts ayant $X = \{1, 2, \dots, n\}$ comme ensemble de sommets. En d'autres mots, lorsqu'on construit un graphe simple

sur X , pour chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes on a le choix entre la prendre ou ne pas la prendre. On a donc, puisque ces choix sont indépendants les uns des autres, un total de $2^{\binom{n}{2}}$ possibilités. Parmi ceux-ci, $\binom{n}{m}$ auront exactement m arêtes.

- 23 Soit G l'ensemble des graphes simples sur $\{1, 2, \dots, n\}$ et G_p l'ensemble des graphes pairs sur $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Montrons que G et G_p ont la même cardinalité (qui d'après l'exercice 22 est $2^{\binom{n}{2}}$) en construisant une bijection $\Phi: G_p \rightarrow G$. Pour $G \in G_p$, posons $\Phi(G) = G - x$ où $x = n+1$. Cette fonction est bijective puisque $H \in G$ ne peut s'étendre que d'une seule façon à un graphe simple pair G sur $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Pour obtenir G , on doit ajouter à H le sommet $n+1$ et joindre ce nouveau sommet à tous les sommets impairs de H . Les sommets pairs de H restent pairs, les sommets impairs de H deviennent pairs et le nouveau sommet $n+1$ est de degré pair puisque dans tout graphe simple, y compris H , il y a un nombre pair de sommets impairs.

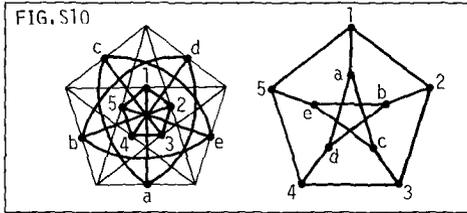


- 24 a. Ceci est évident même dans le cas $X \cap Y \neq \emptyset$.
- b. Soit $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{P}_2(X \cup Y)$. Si $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{P}_2(X)$ alors c'est une arête de K_X et donc de $K_X \vee K_Y$. De même pour $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{P}_2(Y)$. La seule autre possibilité est $\{z_1, z_2\} = \{x, y\}$ où $x \in X$ et $y \in Y$, mais dans ce cas, $\{z_1, z_2\} \in K_X \vee K_Y$.
- c. On a déjà vu que $D_X \vee D_Y = K_{X, Y}$. De plus il est évident que $K_{X, Y} \cup K_X \cup K_Y = K_{X \cup Y}$. On a donc $\overline{K_{X, Y}} = \overline{K_X \cup K_Y} = \overline{D_X \vee D_Y}$.
- 25 Puisque D_n n'a aucune arête, $\forall Y \subseteq X = \{1, 2, \dots, n\}$, $\{Y, X-Y\}$ est une bipartition de D_n . Il y a évidemment 2^n choix pour Y , mais comme $\{Y, Z\} = \{Z, Y\}$ est compté deux fois, il y a 2^{n-1} bipartitions. Une autre façon de procéder est de considérer l'ensemble des sommets dans la même classe que le sommet 1. Il y a 2^{n-1} possibilités pour ce sous-ensemble V de $\{2, 3, \dots, n\}$ et il détermine uniquement la bipartition $\{\{1\} \cup V, X - \{1\} \cup V\}$ de D_n .
- 26 a. $n = 1$ et $n = 2$ b. $\forall n$ c. n pair d. $\forall n$ e. aucune
- 27 Soit $H = (Y, B)$ un sous-graphe de $G = (X, A)$ et $\{X_1, X_2\}$ une bipartition de G . Il est évident que $\{Y \cap X_1, Y \cap X_2\}$ est une bipartition de H car $B \subseteq A$.
- 28 Dans les deux cas, le graphe-arête est isomorphe à C_3 .
- 29 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Bien sûr, G^* est d'ordre $|A|$. Le nombre

$$\text{d'arêtes de } G^* \text{ est } \sum_{x \in X} \binom{d(x)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{x \in X} d(x)^2 - |A|.$$

30 Les $\binom{n}{2}$ arêtes de K_n donnent autant de sommets dans son graphe-arête. Chaque arête de K_n relie deux sommets de degré $n - 1$. Elle est donc adjacente à $2(n - 2)$ arêtes, c.-à-d. de degré $2n - 4$ comme sommet du graphe-arête. On voit que le graphe-arête de K_n contient $\frac{1}{2}n(n - 1)(n - 2)$ arêtes. En fait, tout choix de 3 sommets de K_n , il y en a $\binom{n}{3} = \frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$, détermine 3 arêtes du graphe-arête de K_n .

31 Il est facile de voir que $(K_5)^*$ et $\overline{P(5,2)}$ sont tous deux d'ordre 10 et réguliers de degré 6. Montrons que $\overline{(K_5)^*}$ et $P(5,2)$, qui sont réguliers de degré 3, sont isomorphes. Un isomorphisme $f: \overline{(K_5)^*} \rightarrow P(5,2)$ est également un isomorphisme entre $(K_5)^*$ et $\overline{P(5,2)}$. La figure 10 décrit un tel isomorphisme.



32 (Voir figure S6). Longueur 5: $[1,2,3,4,5,1]$, $[6,8,10,7,9,6]$, $[1,2,3,8,6,1]$;
 longueur 6: $[1,2,3,4,9,6,1]$, $[1,2,7,10,8,6,1]$; longueur 7: aucun;
 longueur 8: $[1,2,7,10,8,3,4,5,1]$; longueur 9: $[1,2,3,4,5,10,7,9,6,1]$.

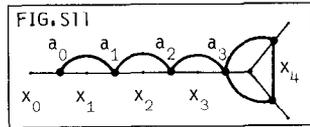
33 Supposons $G = (X,A)$ non-connexe et soit $x \neq y$, $x \in X$, $y \in X$. Si x et y sont dans des composantes connexes différentes de G , alors $\{x,y\} \notin A$ et $c = [x,y]$ est une chaîne de longueur 1 dans \overline{G} de x à y . Si x et y sont dans la même composante connexe de G , comme celle-ci n'est pas G au complet, (puisque G n'est pas connexe) prenons z dans une autre composante connexe de G . On a $\{x,z\} \notin A$ et $\{y,z\} \notin A$; $\{x,z,y\}$ est donc une chaîne de longueur 2 dans \overline{G} entre x et y . Si G est non-connexe, on en conclut donc que \overline{G} doit être connexe, c.-à-d. G et \overline{G} ne peuvent pas tous deux être non-connexes.

34 Soit $a = \{x,x'\} \in A$ et $b = \{y,y'\} \in A$ deux sommets distincts de G^* , le graphe-arête de $G = (X,A)$. Si $|a \cap b| = 1$, alors $\{a,b\}$ est une arête de G^* et $\{a,b\}$ est une chaîne de longueur 1 dans G^* de a à b . Si $a \cap b = \emptyset$, comme G est connexe, soit $[x,x_1,x_2,\dots,x_{m-1},y]$ une chaîne (de longueur m) dans G de x à y . Par définition, $\{a,\{x,x_1\},\{x_1,x_2\},\dots,\{x_{m-1},y\},b\}$ est une chaîne de longueur $m + 1$ dans G^* du sommet a au sommet b . Les arêtes a et b étant arbitraires, G^* est connexe.

35 a. Soit $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ un isomorphisme. Il induit un isomorphisme (préservant la longueur) entre les bras de G_1 et les bras de G_2 . En effet, il suffit

d'envoyer le bras $[x_0, x_1, \dots, x_k]$ de G sur le bras $[\psi(x_0), \psi(x_1), \dots, \psi(x_k)]$ de G_2 . On a donc $B(G_1) = B(G_2)$.

- b. Si $[x_0, x_1, \dots, x_k]$ est un bras de G de longueur $k > 1$, alors il est facile de voir (fig. S11) que $[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}]$, où $a_i = [x_i, x_{i+1}]$, $0 \leq i \leq k-1$, est un bras de G^* de longueur $k-1$.



Inversement, tout bras de G^* de longueur $v \geq 1$ détermine un unique bras de G de longueur $v+1$. Le plus long bras de G , s'il est de longueur $B(G) > 1$, donne donc un bras de G^* de longueur $B(G) - 1$ et on a $B(G^*) = B(G) - 1$. Si G ne contient que des bras de longueur 1, c.-à-d. $B(G) = 1$, alors G^* n'a aucun sommet de degré 1 et $B(G^*) = 0$.

- c. Supposons que $\forall x \in X, d(x) \neq 1$. Par définition, on a alors $B(G) = 0$. Si G^* contient un sommet $a = \{x, y\} \in A$ de degré 1, considérons $b = \{y, z\}$ l'unique arête adjacente à a . Ceci est absurde car alors x est de degré 1. On a donc $\forall a \in A, d_{G^*}(a) \neq 1$; et alors $B(G^*) = 0$.

- 36 a. Soit $G = (X, A)$ un graphe simple isomorphe à son graphe-arête. Montrons que $\forall x \in X, d(x) = 2$. Nous utiliserons les notations et résultats de l'exercice 35. Si G contient un sommet de degré 1, alors $B(G) > 0$. Par 35 a, comme $G \cong G^*$, on a $B(G) = B(G^*)$, or, par 35 b, on a également $B(G) = B(G^*) + 1$; ce qui est absurde. Donc $\forall x \in X, d(x) \neq 1$. Si G contient un sommet de degré 0, alors G^* en contiendra également un, disons $\{x, y\}$, ce qui est absurde car alors x et y sont des sommets de degré 1 dans G . On a donc $\forall x \in X, d(x) \geq 2$. D'après l'exercice 29, puisque G et G^* ont le même nombre d'arêtes, on a $|A| = \sum_{x \in X} \binom{d(x)}{2}$, c.-à-d. $\sum_{x \in X} d(x)(d(x) - 2) = 0$. La seule possibilité est donc $d(x) = 2, \forall x$.

- b. Les graphes simples réguliers de degré 2 sont faciles à trouver. Ce sont les graphes simples dont les composantes connexes sont des cycles, c.-à-d. isomorphe à C_m pour un m . En d'autres mots, G est isomorphe à son graphe-arête $\Leftrightarrow \exists n_1, n_2, \dots, n_k, k \geq 1, \forall i, n_i \geq 3$, tel que $G \cong C_{n_1} + C_{n_2} + \dots + C_{n_k}$ (réunion disjointe). Pour n quelconque, le nombre, à isomorphisme près, de graphes simples isomorphes à leur graphe-arête et d'ordre n , est donc égal au nombre de partitions de l'entier n en parts au moins égales à 3. Par exemple, pour les petits ordres, ces graphes sont: $C_3, C_4, C_5, C_6, C_3 + C_3, C_7, C_3 + C_4, C_8, C_5 + C_3, C_4 + C_4, C_9, C_6 + C_3, C_5 + C_4, C_3 + C_3 + C_3$, etc. En particulier, $\forall n \geq 3$ il n'y en a qu'un seul qui soit connexe, soit C_n .

- 37 Prouvons que \sim est une relation d'équivalence sur X et que les composantes connexes G_i sont des graphes simples connexes.

Réflexivité: puisque $\forall x, [x]$ est un cycle en x , on a $x \sim x$.

Symétrie: supposons $x \sim y$ et $x \neq y$; soit $c = [x, x_1, x_2, \dots, x_r = y]$ une chaîne de x à y . Alors $-c = [y, x_{r-1}, \dots, x_1, x]$ est une chaîne de y à x . Donc $y \sim x$.

Transitivité: supposons $x \sim y$ et $y \sim z$. Soit $c_1 = [x, x_1, \dots, x_{r-1}, y]$ et $c_2 = [y, y_1, \dots, y_{s-1}, z]$ deux chaînes (avec possiblement $r = 0$ ou $s = 0$). Alors $c_1 + c_2 = [x, x_1, \dots, x_{r-1}, y, y_1, y_2, \dots, y_{s-1}, z]$ est une chaîne de x à z . Donc $x \sim z$. Soit $1 \leq i \leq k$ et x, y deux sommets de G_i . Par définition, on a $x \sim y$. Soit donc $c = [x, x_1, \dots, x_{r-1}, y]$ une chaîne dans G . Il est clair que x_1, x_2, \dots, x_{r-1} sont également des sommets de G_i . Comme $G_i = G_{X_i}$, c est donc également une chaîne de G_i . Comme x et y , sommets de G_i , sont arbitraires, on en déduit que G_i est connexe.

Parmi les graphes simples d'ordre n ayant k composantes connexes, prenons-en un, disons $G = (X, A)$, ayant un nombre maximum d'arêtes. Bien sûr, $\forall 1 \leq i \leq k$, on a $G_{X_i} = K_{X_i}$ car autrement $|A|$ ne serait pas maximum. De plus, toutes les arêtes de G sont dans la même composante connexe de G . En effet, supposons que $G_{X_j} = K_{X_j}$ et $G_{X_v} = K_{X_v}$ contiennent toutes deux des arêtes, avec disons, $n_j = |X_j| \geq |X_v| = n_v > 1$. Ceci est absurde car pour $z \in X_v$, le graphe simple, $G' = \bigcup_{i=1}^k K_{Y_i}$, où $Y_i = X_i$ pour $i \neq j$, $i \neq v$, $Y_j = X_j \cup \{z\}$ et $Y_v = X_v - \{z\}$, est d'ordre n , a k composantes et a strictement plus d'arêtes que G . En effet, pour construire G' , on a enlevé les $n_v - 1$ arêtes incidentes à z pour les remplacer par n_j arêtes et $n_j > n_v - 1$. En conclusion, le graphe simple G d'ordre n ayant k composantes et ayant le plus grand nombre d'arêtes est isomorphe à $D_S \cup K_T$ où $S \cap T = \emptyset$, $|S| = k - 1$ et $|T| = n - k + 1$, et a donc $\frac{1}{2}(n - k + 1)(n - k)$ arêtes. Pour tout graphe simple $G = (X, A)$, $|X| = n$, ayant k composantes, on a bien $m = |A| \leq \frac{(n - k)(n - k + 1)}{2}$.

Pour démontrer l'inégalité $n - k \leq m$, il suffit de remarquer que parmi les graphes simples d'ordre n ayant k composantes de cardinalités, n_1, n_2, \dots, n_k , ceux ayant le moins d'arêtes en ont $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_k - 1$, respectivement, dans les composantes et alors $|A| = \sum_{i=1}^k (n_i - 1) = (\sum_{i=1}^k n_i) - k = n - k$ (voir proposition page 38). En général, on a donc bien $m \geq n - k$ si $G = (X, A)$ (où $|X| = n$, $|A| = m$) a k composantes.

38 En particulier, l'exercice 37 dit que si $G = (X, A)$ est un graphe simple, d'ordre n et non-connexe, (donc $k \geq 2$) alors $|A| \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \leq \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$. Par contraposition, $|A| > \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ implique donc G connexe. (Les graphes simples non-connexes d'ordre n ayant le plus d'arêtes en ont $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$ et sont isomorphes à $K_{n-1} \cup K_{\{n\}}$).

39 Soit $d = (n, k)$. Il est clair que $[y_1, y_{1+k}, y_{1+2k}, \dots, y_{1+\frac{n}{d}k}]$ est un cycle de longueur $\frac{n}{d}$ car $\frac{n}{d}k \equiv 0 \pmod{n}$. Ce cycle est élémentaire car $(1 + ik \equiv 1 + jk, 1 \leq i, j \leq \frac{n}{d}) \Rightarrow (n \text{ divise } (i - j)k) \Rightarrow (\frac{n}{d} \text{ divise } i - j) \Rightarrow i = j$. De même, $[y_2, y_{2+k}, \dots], [y_3, y_{3+k}, \dots], \dots, [y_d, y_{d+k}, \dots]$, sont

des cycles élémentaires disjoints chacun de longueur $\frac{n}{d}$. (Tracer $P(20,8)$ pour mieux voir ce qui se passe.)

40 Soit G un graphe simple biparti et connexe. Pour $x, y \in X$, posons $x \equiv y$ s'il existe une chaîne de longueur paire de x à y . Comme G est connexe, si x et y ne sont pas en relation \equiv , c.-à-d. si $x \not\equiv y$, alors c'est qu'il n'y a que des chaînes de longueur impaire de x à y . Il est facile de voir que \equiv est une relation d'équivalence sur X admettant exactement deux classes d'équivalence (sauf si $|G| = 1$) et que la partition associée est l'unique bipartition de G . (Voir la proposition de la page 16).

41 a. Oui, car il n'y a que deux sommets de degré impair.

b. Considérons le multigraphe avec boucles dont les sommets sont les points d'intersection dans la figure et dont les arêtes sont les courbes. Il y a deux sommets impairs; un de degré 5 (le sommet où il y a la boucle) et un de degré 3. Comme la figure est connexe, on peut donc la tracer sans lever le crayon; ce que nous laissons au lecteur, qui devrait, bien sûr, commencer son dessin à un des deux sommets impairs et le terminer à l'autre.

42 Eulérien non-hamiltonien: $K_{2,4}, R_4$ moins les arêtes $\{1,2\}$ et $\{3,4\}$;

hamiltonien non-eulérien: $R_3 \simeq K_4, C_8, P(4,1) = B_3$.

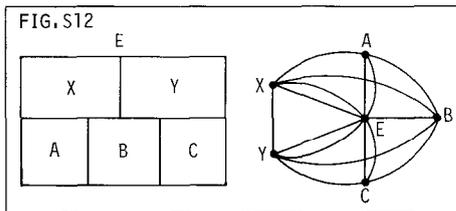
43 a. T_8 est connexe eulérien et hamiltonien.

b. F_8 n'est pas connexe (donc ni eulérien ni hamiltonien); {cases blanches} et {cases noires} sont les deux composantes connexes de F_8 .

c. R_8 est connexe hamiltonien et non-eulérien (les quatre coins de l'échiquier sont des sommets de degré 3).

d. C_8 est connexe hamiltonien (fig. 28) et non-eulérien (exactement 8 sommets sont de degré 3).

44 Considérons le multigraphe (fig. S12) dont les sommets sont les 6 régions du plan (y compris l'extérieur) délimitées par la figure et dont les arêtes sont les segments. Un segment étant une arête entre R_1 et R_2 s'il est sur la frontière commune de R_1 et R_2 .

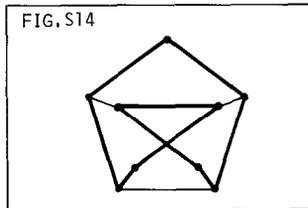
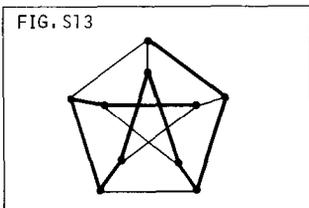


Tracer une courbe continue coupant chacun des 16 segments revient à trouver une chaîne eulérienne dans le multigraphe considéré. Ceci est évidemment impossible puisque 4 sommets sont impairs.

45 Soit $c = [x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x_0]$ un cycle eulérien du graphe simple $G = (X, A)$ où $|A| = m$. Par définition, $[\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{m-2}, x_{m-1}\}, \{x_{m-1}, x_0\}, \{x_0, x_1\}]$

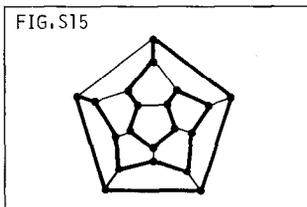
est alors un cycle hamiltonien de G^* .

- 46 En essayant toutes les possibilités, par exemple par ordinateur, on se convainc assez facilement que $P(5,2)$ n'est pas hamiltonien. Une démonstration plus élégante consiste à supposer l'existence d'un cycle hamiltonien (alors de longueur 10) de $P(5,2)$. Les 5 arêtes de rang pair (respectivement impair) dans ce cycle constituent un facteur linéaire. Ces deux facteurs linéaires ainsi que le facteur linéaire des arêtes non-parcourues forment alors une factorisation linéaire de $P(5,2)$. Ce qui n'existe pas d'après l'exercice 65. La figure S13 décrit une des nombreuses chaînes hamiltoniennes de $P(5,2)$ qui est donc semi-hamiltonien. Il est facile de voir que les graphes $P(5,2) - x$ sont tous isomorphes entre eux. La figure S14 décrit un cycle hamiltonien de $P(5,2) - y_1$.

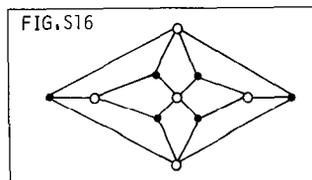


- 47 a. K_p est hamiltonien, $\forall p$, mais n'est eulérien que pour $p \equiv 1 \pmod{2}$.
 b. $K_{p,q}$ n'est eulérien que si $p \equiv 0 \pmod{2}$ et $q \equiv 0 \pmod{2}$; $K_{p,q}$ n'est hamiltonien que si $p = q$
 c. R_p n'est jamais eulérien mais est toujours hamiltonien.

48 Oui



- 49 Ceci est évident puisqu'un graphe simple bi-parti ne contient aucun cycle simple de longueur impaire et, à fortiori, aucun cycle hamiltonien si $n = |G|$ est impair. La figure S16 décrit l'unique bipartition du graphe de Herschel:

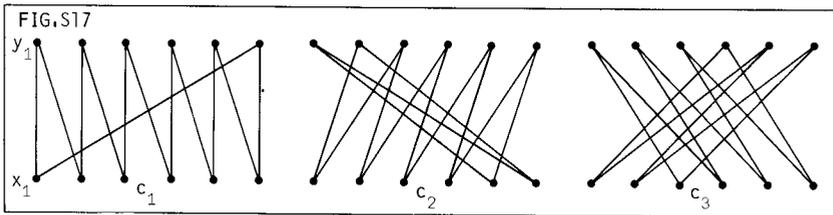


50 Soit $\{1,2,\dots,10,11\}$ l'ensemble des personnes. Une façon d'asseoir les 11 personnes correspond à un cycle hamiltonien de K_{11} . Nous cherchons donc le nombre maximum μ de cycles hamiltoniens (n'ayant aucune arête commune) dans K_{11} . Comme $\binom{11}{2} = 55$, on a $\mu \leq 5$. En fait, on a $\mu = 5$, puisque voici 5 cycles hamiltoniens disjoints dans K_{11} :

$$\begin{aligned} c_1 &= [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,1], & c_2 &= [1,3,5,7,9,11,2,4,6,8,10,1], \\ c_3 &= [1,4,7,10,2,5,8,11,3,6,9,11], & c_4 &= [1,5,9,2,6,10,3,7,11,4,8,1], \\ c_5 &= [1,6,11,5,10,4,9,3,8,2,7,1]. \end{aligned}$$

51 Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ l'ensemble des hommes et $\{y_1, y_2, \dots, y_6\}$ l'ensemble des femmes. Une façon d'asseoir les 12 personnes correspond à un cycle hamiltonien de $K_{6,6}$. Nous cherchons donc le nombre maximum λ de cycles hamiltoniens "disjoints" dans $K_{6,6}$. Puisque $\forall 1 \leq i \leq 6, d(x_i) = d(y_i) = 6$ et qu'un cycle hamiltonien utilise deux arêtes incidentes à chaque sommet, on a $\lambda \leq 3$. En fait, il est facile de trouver 3 cycles hamiltoniens disjoints dans $K_{6,6}$; par exemple:

$$\begin{aligned} c_1 &= [x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5, x_6, y_6, x_1], & \text{c.-à-d. les } \{x_i, y_i\} & \text{ et les } \{y_i, x_{i+1}\}. \\ c_2 &= [x_1, y_2, x_6, y_1, x_5, y_6, x_4, y_5, x_3, y_4, x_2, y_3, x_1], & \text{c.-à-d. les } \{x_i, y_{i+1}\} & \text{ et les } \{y_i, x_{i+4}\}. \\ c_3 &= [x_1, y_4, x_6, y_3, x_5, y_2, x_4, y_1, x_3, y_6, x_2, y_5, x_1], & \text{c.-à-d. les } \{x_i, y_{i+3}\} & \text{ et les } \{y_i, x_{i+2}\}. \end{aligned}$$



52 Dénotons $x_{i,j}$ la $j^{\text{ième}}$ case de la $i^{\text{ième}}$ colonne. Colorions de la façon habituelle les cases de l'échiquier, c.-à-d. $x_{i,j}$ est blanche si $i + j \equiv 0 \pmod{2}$ et noire si $i + j \equiv 1 \pmod{2}$.

- Si $r + s \equiv 0 \pmod{2}$, alors $C(n,m; r,s)$ n'est même pas connexe. En effet, la composante connexe de $x_{1,1}$ ne contient que des cases blanches. De même, si $(r,s) = d > 1$, seules les cases $x_{k,\ell}$ où $k \equiv 1 \pmod{d}$ et $\ell \equiv 1 \pmod{d}$ ont des chances d'être dans la composante connexe de $x_{1,1}$. De toute façon, $x_{1,2}$ n'est certainement pas dans la même composante connexe que $x_{1,1}$.
- Si $r + s \equiv 1 \pmod{2}$, alors $\{\text{cases blanches}\}, \{\text{cases noires}\}$ est une bipartition de $C(n,m; r,s)$. Si $nm \equiv 1 \pmod{2}$, alors ce graphe est biparti et d'ordre impair, il n'admet donc aucun cycle de longueur impaire et, à fortiori, aucun cycle hamiltonien.

- c. Soit c un cycle hamiltonien de $C(4,n; 1,2)$, partant de la case $x_{1,1}$.
 Dénotons $c(i,j)$, $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$, le nombre d'arêtes de c joignant une case de la $i^{\text{ième}}$ colonne à une case de la $j^{\text{ième}}$ colonne.

On a les équations suivantes:

$$\forall i,j, c(i,j) = c(j,i) \text{ et } \forall i, c(i,i) = 0.$$

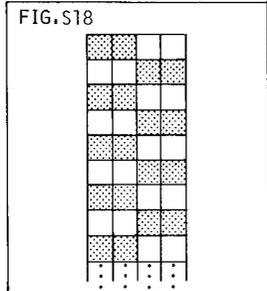
$$(1) \quad c(1,2) + c(1,3) = 2n$$

$$(2) \quad c(2,1) + c(2,3) + c(2,4) = 2n$$

$$(3) \quad c(3,1) + c(3,2) + c(3,4) = 2n$$

$$(4) \quad c(4,2) + c(4,3) = 2n$$

$$-(1) + (2) + (3) - (4) \text{ donne } c(2,3) = 0.$$



Ceci est contradictoire, puisque seules les cases pointillées (fig. S18) peuvent possiblement être atteintes.

REMARQUE Euler a démontré que $C(4,n; 1,2)$ n'est jamais hamiltonien pour $n < 8$, et, Flye St-Marie [16] l'a démontré pour $n = 8$. Kraitchik cite ce résultat, c.-à-d. exercice 52 c, dans [9] page 259.

Les figures S19, S20 et S21 donnent des cycles hamiltoniens pour les graphes $C(3,10; 1,2)$, $C(5,24; 1,4)$ et $C(5,20; 2,3)$ respectivement. On peut démontrer que 10, 24 et 20 sont respectivement les plus petites valeurs n , m et ℓ telles que $C(3,n; 1,2)$, $C(5,m; 1,4)$ et $C(5,\ell; 2,3)$ soient hamiltoniens. On peut également démontrer que $\forall n$, $C(4,n; 1,2)$ (voir exercice 52 c), $C(6,n; 1,4)$ et $C(6,n; 2,3)$ n'est jamais hamiltonien (voir [20]).

- 53 Soit t_1, t_2, \dots, t_n les petits triangles de la triangulation de T . Considérons le graphe simple dont les sommets sont $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ et prenons l'arête $\{x_i, x_j\}$, où $i > 0$, $j > 0$, $i \neq j$, si les triangles t_i et t_j ont un côté en commun de sommets étiquetés 0 et 1. De plus, le sommet x_0 correspond à l'extérieur de T et on prend l'arête $\{x_0, x_i\}$, $i > 0$, si et seulement si le triangle t_i a un côté, étiqueté 0 et 1, sur le segment P_0P_1 . Il est clair que dans ce graphe simple, x_0 est de degré impair. Il y a donc un nombre impair de sommets x_i , $i > 0$, de degré impair. Ces sommets sont tous de degré égal à un car $d(x_i) = 3$, $i > 0$, est impossible. Remarquons finalement que $d(x_i) = 1$, $i > 0$, si et seulement si le triangle t_i a des sommets étiquetés 0, 1 et 2. On a donc prouvé que la triangulation admet un nombre impair de triangles ayant les trois étiquettes.

- 54 Si $n > 1$, alors $\forall x \in K_n$, $e(x) = 1$. On a donc $r(K_n) = \delta(K_n) = 1$.

Pour $n = 1$, on a $r(K_1) = \delta(K_1) = 0$.

Si n est pair, $\forall x \in C_n$, $e(x) = \frac{n}{2}$. On a donc $r(C_n) = \delta(C_n) = \frac{n}{2}$.

Si n est impair, $\forall x \in C_n$, $e(x) = \frac{n-1}{2}$. On a donc $r(C_n) = \delta(C_n) = \frac{n-1}{2}$.

FIG. S19

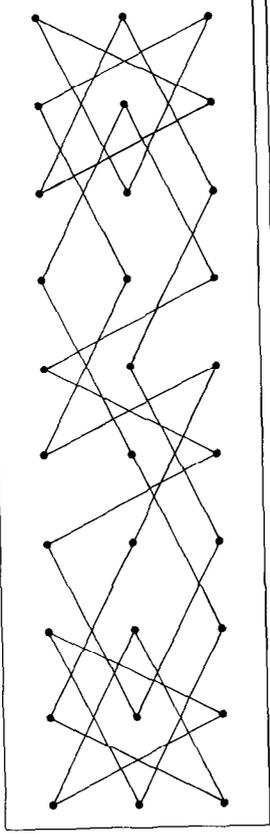


FIG. S20

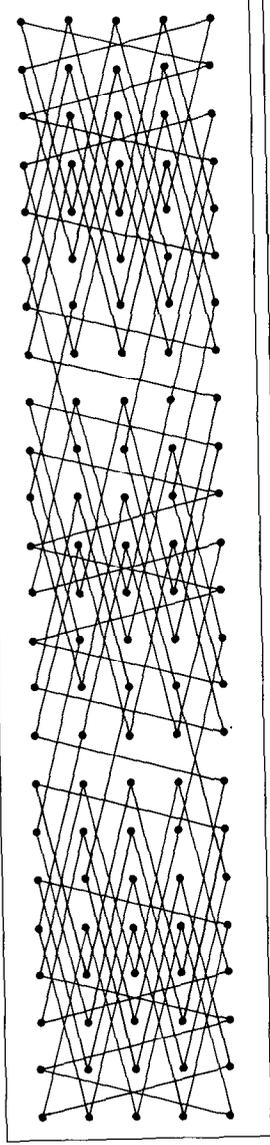
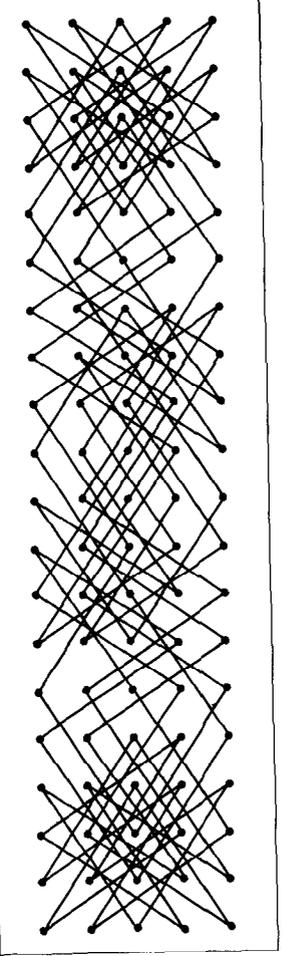


FIG. S21



Quel que soit $n \geq 3$, on a donc toujours $r(C_n) = \delta(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dénote le plus grand entier $\leq \frac{n}{2}$.

Dans R_n , $n > 3$, on a $e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $r(R_n) = 1$ et $\delta(R_n) = 2$, si $n > 3$.

Si $n = 3$, $\forall x, e(x) = 1$ et $r(R_3) = \delta(R_3) = 1$.

Dans E_n , $n \geq 2$, on a $e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $r(E_n) = 1$ et $\delta(E_n) = 2$, si $n \geq 2$, et bien sûr $r(E_1) = \delta(E_1) = 1$.

Dans $K_{n,m}$, $n > 1$ et $m > 1$, $\forall x$, $e(x) = 2$. On a alors $r(K_{n,m}) = \delta(K_{n,m}) = 2$.

Notons finalement que $K_{1,n} \approx K_{n,1} \approx E_n$, $\forall n$.

55 (Voir problème 54). Dans C_n , $n \geq 3$, et R_m , $m > 3$, il est vrai que $x = 0$ est le seul centre car $e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$. Mais attention, $R_3 \approx K_4$ a quatre centres. Dans C_n , $\forall x$, $e(x) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; tous les sommets de C_n sont donc des centres.

56 Soit $r = r(G)$ et x_0 un centre de G , c.-à-d. $e(x_0) = r$. Soit x, y des sommets arbitraires de G . Puisque $e(x_0) = r$, on a $k = d(x_0, x) \leq r$ et $\ell = d(x_0, y) \leq r$. Soit donc $c_1 = [x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x]$ et $c_2 = [x_0, y_1, \dots, y_{\ell-1}, y]$ deux géodésiques de x_0 à x et de x_0 à y , respectivement. Puisque

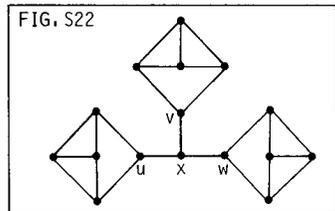
$-c_1 + c_2 = [x, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0, y_1, \dots, y_{\ell-1}, y]$ est une chaîne de longueur $k + \ell \leq 2r$ entre x et y , on a $d(x, y) \leq 2r$. Les sommets x et y étant arbitraires, on a $\delta(G) = \max_{x,y} d(x, y) \leq 2r = 2 \cdot r(G)$.

57 Soit $c = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ et $c' = [x'_0, x'_1, \dots, x'_k]$ deux chaînes élémentaires de longueur maximum k et sans sommet en commun. Comme G est connexe, $\exists 0 \leq i \leq k$ et $0 \leq j \leq k$ tels que \exists une chaîne élémentaire c'' de x_i à x'_j telle que c'' et c n'aient que x_i en commun et c'' et c' n'aient que x'_j en commun.

Si $i > \frac{k}{2}$ et $j \leq \frac{k}{2}$, alors $[x_0, x_1, \dots, x_i] + c'' + [x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_k]$ est une chaîne élémentaire de longueur $> k$ (contradiction). Si $i > \frac{k}{2}$ et $j > \frac{k}{2}$, alors $[x_0, x_1, \dots, x_i] + c'' + [x'_j, x'_{j-1}, \dots, x'_0]$ est une chaîne élémentaire de longueur $> k$ (contradiction). De même, si $i \leq \frac{k}{2}$, alors

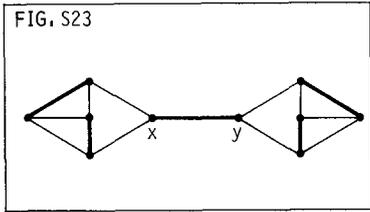
$[x_k, x_{k-1}, \dots, x_i] + c'' + [x'_j, x'_{j+1}, \dots, x'_k]$ ou $[x_k, x_{k-1}, \dots, x_i] + c'' + [x'_j, x'_{j-1}, \dots, x'_0]$ est une chaîne élémentaire de longueur $> k$ (contradiction).

58 Soit L un facteur linéaire de ce graphe simple G . Alors L contient une arête incidente à x (fig.S22), disons $\{x, w\}$. Dans $G - x$, la composante connexe de v (ou de u) admet alors un facteur linéaire; ce qui est absurde puisqu'elle est d'ordre 5.



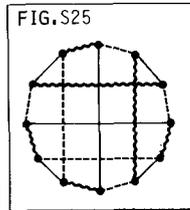
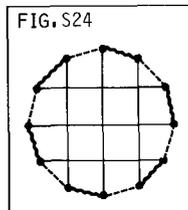
Notez que Tutte a prouvé: THEOREME Le graphe simple $G = (X, A)$ admet un facteur linéaire si et seulement si $\forall S \subseteq X$, l'entier $|S|$ est au moins égal au nombre de composantes connexes d'ordre impair dans $G - S$. Par exemple, en prenant $S = \{x\}$ dans le graphe simple de la figure 22, on voit qu'il n'admet pas de facteur linéaire.

- 59 La figure S23 donne un facteur linéaire de ce graphe simple.
 On voit facilement que ce graphe simple possède exactement 4 facteurs linéaires et que ces 4 facteurs linéaires contiennent toujours l'arête $\{x,y\}$. Il n'admet donc pas de factorisation linéaire.

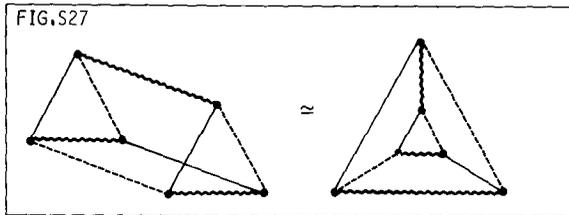
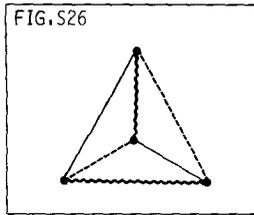


- 60 Soit $G = (X,A)$ un graphe simple qui soit un U-graphe et $\{L_1, L_2, L_3\}$ son unique factorisation linéaire. Le graphe partiel $L_1 \cup L_2$ est alors régulier de degré 2, c'est-à-dire la réunion de k cycles disjoints. Si $k > 1$, soit c un cycle simple de $L_1 \cup L_2$, c.-à-d. une composante connexe de $L_1 \cup L_2$. Posons $L'_1 = (L_1 - c \cap L_1) \cup (c \cap L_2)$, $L'_2 = (L_2 - c \cap L_2) \cup (c \cap L_1)$ et $L'_3 = L_3$; alors $\{L'_1, L'_2, L'_3\}$ est une factorisation linéaire de G , distincte de $\{L_1, L_2, L_3\}$. Contradiction. On a donc $k = 1$, c.-à-d. $L_1 \cup L_2$ est un cycle hamiltonien. De même, $L_1 \cup L_3$ et $L_2 \cup L_3$ sont des cycles hamiltoniens.
- 61 Non (voir exercice 65)

- 62 La figure S24 donne une factorisation linéaire hamiltonienne du graphe de la figure 38, où $L_1 = \{ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \}$, $L_2 = \{ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \}$ et $L_3 = \{ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \}$. La factorisation linéaire de la figure S25 est non-hamiltonienne.



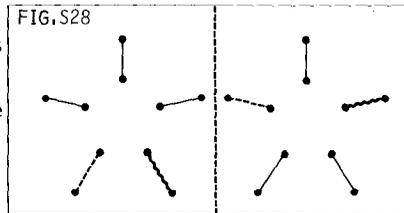
- 63 Soit $\{1,2,\dots,10\}$ l'ensemble des joueurs. Le graphe du tournoi rotation est donc K_{10} . Soit $\{L_1, L_2, \dots, L_9\}$ une factorisation linéaire de K_{10} (elle contient 9 facteurs linéaires puisque K_{10} est régulier de degré 9). Organisons le tournoi de façon qu'il y ait 9 rondes consécutives de chacune 5 parties. Plus précisément les 5 parties de la ronde i , $1 \leq i \leq 9$, sont entre les 5 paires de joueurs reliés par les arêtes de L_i . Comme L_i est un facteur linéaire, chaque joueur joue exactement une partie en $i^{\text{ième}}$ ronde. Comme les L_i forment une factorisation linéaire de K_{10} toutes les 55 paires de joueurs se rencontrent une et une seule fois au cours du tournoi.
- 64 Sans perte de généralité, montrons que $C_1 \cup C_2$ est un cycle hamiltonien de $G \omega G'$. Par définition, $B_1 \cup B_2 - \{a_1, a_2\}$ est une chaîne hamiltonienne de $G - x$ et $B'_1 \cup B'_2 - \{a'_1, a'_2\}$ est une chaîne hamiltonienne de $G' - x'$. En joignant ces deux chaînes à l'aide des arêtes c_1 et c_2 , on obtient un cycle hamiltonien de $G \omega G'$. La figure S26 décrit l'unique factorisation linéaire hamiltonienne de K_4 . Si G est un graphe simple cubique fortement hamiltonien d'ordre $2k$, alors $G \omega K_4$ est fortement hamiltonien et d'ordre $2(k+1)$. Par exemple, la figure S27 est le mariage ω de deux copies de $K_4 \approx R_3$ par rapport aux sommets $x = 0$ et $x' = 0$.



65 Soit R_1 et R_2 les deux rives du séparateur S , c.-à-d. R_1 et R_2 sont les composantes connexes de $G - S = (X, A - S)$. Posons $r_1 = |R_1|$ et $r_2 = |R_2|$. Bien sûr $r_1 + r_2 = |G|$ est pair et donc $r_1 \equiv r_2 \pmod{2}$. De plus, si k_i , $i = 1, 2, 3$, est le nombre d'arêtes de A_i dans R_1 , c.-à-d. $k_i = |A_i \cap R_1|$; on a $r_1 = 2k_i + |S \cap A_i|$. En d'autres mots, $|S \cap A_1| \equiv |S \cap A_2| \equiv |S \cap A_3| \equiv r_1 \equiv r_2 \pmod{2}$. Considérons le graphe de Petersen et soit

$S = \{\{x_i, y_i\} | 1 \leq i \leq 5\}$. Si $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ est une factorisation linéaire du graphe de Petersen, alors $|S| = 5 = a_1 + a_2 + a_3$ où $a_i = |A_i \cap S|$, $1 \leq i \leq 3$, sont de même parité. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que $a_1 = 3, a_2 = a_3 = 1$. A rotation et réflexion près, il n'y a donc que deux possibilités (fig. 28) pour

les arêtes du séparateur S . Dans les deux cas, ceci conduit à une contradiction. Par exemple, dans la partie gauche de la figure 28, les arêtes $\{y_5, y_3\}$ et $\{y_1, y_3\}$ sont adjacentes mais doivent toutes deux être dans le même facteur linéaire.



66 Soit b pour chaloupe. Considérons le graphe simple dont les sommets sont les 128 parties de $\{b, m, m', m'', c, c', c''\}$, correspondant à ce qui est sur la rive initiale de la rivière. Deux sommets sont adjacents si une traversée légitime permet de passer d'une situation à l'autre. Il y a une solution à cette énigme si le sommet \emptyset est dans la même composante connexe que le sommet $bmm'm'cc'c''$. Nous pourrions tracer la composante connexe de \emptyset mais nous contentons de donner une chaîne simple de $bmm'm'cc'c''$ à \emptyset :

$\{bmm'm'cc'c'', mm'cc', bmm'm'cc', mm'm'', bmm'm'c, mc, bmm'cc', m'c', bm'm'c'c'', c'c'', bcc'c'', c'', bcc'', \emptyset\}$.

67 Il est facile de voir que les sommets de la composante connexe de \emptyset ne contiennent jamais plus d'un mari.

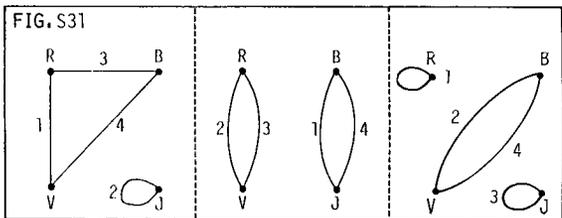
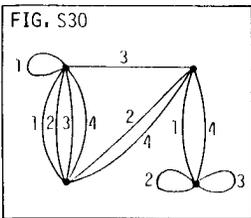
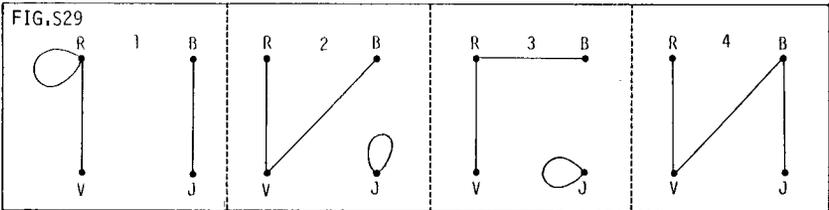
a. Soit $m_1 m_2 m_3 m_4 f_1 f_2 f_3 f_4$ notre monde et c la chaloupe. Voici une chaîne simple de $cm_1 m_2 m_3 m_4 f_1 f_2 f_3 f_4$ à \emptyset : $[cm_1 m_2 m_3 m_4 f_1 f_2 f_3 f_4, m_1 m_2 m_3 m_4 f_4, bm_1 m_2 m_3 m_4 f_1 f_4, m_1 m_2 m_3 m_4, bm_1 m_2 m_3 m_4 f_1, m_1 f_1, bm_1 m_2 f_1 f_2, f_1 f_2, bf_1 f_2 f_3, \emptyset]$.

b. Cette fois-ci, dénotons par des triplets ordonnés ce qui se trouve sur la 1^{ère} rive, l'îlot et la deuxième rive respectivement. Voici une

chaîne simple résolvant l'énigme:

- $(cm_1m_2m_3m_4f_1f_2f_3f_4, \emptyset, \emptyset)$, $(m_1m_2m_3m_4f_3f_4, bf_1f_2, \emptyset)$, $(bm_1m_2m_3m_4f_1f_3f_4, f_2, \emptyset)$,
- $(m_1m_2m_3m_4f_4, bf_1f_2f_3, \emptyset)$, $(bm_1m_2m_3m_4f_1f_4, f_2f_3, \emptyset)$, $(m_1m_2m_3m_4, bf_1f_2f_3f_4, \emptyset)$,
- $(bm_1m_2m_3m_4f_1, f_2f_3f_4, \emptyset)$, $(m_1m_2f_1, f_2f_3f_4, bm_3m_4)$, $(bm_1m_2m_3f_1, f_2f_3f_4, m_4)$,
- $(m_1f_2, f_2f_3f_4, bm_2m_3m_4)$, $(bm_1m_2f_1, f_2f_3f_4, m_3m_4)$, $(f_1, f_2f_3f_4, bm_1m_2m_3m_4)$,
- $(bm_1f_1, f_2f_3f_4, m_2m_3m_4)$, $(\emptyset, f_2f_3f_4, bm_1m_2m_3m_4f_1)$, $(\emptyset, bf_1f_2f_3f_4, m_1m_2m_3m_4)$,
- $(\emptyset, f_3f_4, bm_1m_2m_3m_4f_1f_2)$, $(\emptyset, bf_1f_3f_4, m_1m_2m_3m_4f_2)$, $(\emptyset, f_4, bm_1m_2m_3m_4f_1f_2f_3)$,
- $(\emptyset, bf_1f_4, m_1m_2m_3m_4f_2f_3)$, $(\emptyset, \emptyset, bm_1m_2m_3m_4f_1f_2f_3f_4)$.

68 Comme précédemment, associons à chaque cube un graphe avec boucles (fig. S29). Superposons ces quatre graphes avec boucles (fig. S30). On peut voir que ce multigraphe avec boucles n'admet que trois graphes partiels avec boucles réguliers de degré 2 et disjoints; soit ceux de la figure S31. On utilise le premier (ou le troisième) pour obtenir les 4 couleurs sur les grandes faces gauche et droite et le deuxième pour les grandes faces devant et derrière. Il y a donc exactement deux solutions.



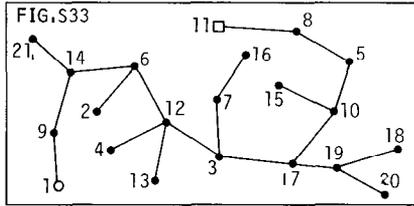
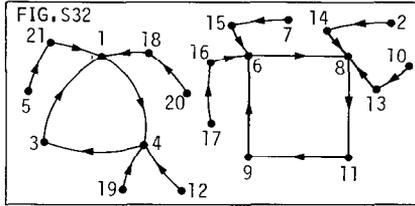
- 69 a. Un arbre n'a aucun cycle simple et, à fortiori, aucun cycle simple de longueur impaire.
 b. Il n'y a que les arbres isomorphes à E_n pour un $n \geq 1$. En d'autres mots, $K_{p,q}$ est un arbre si et seulement si $p = 1$ ou $q = 1$.

- 70 a. $\binom{n-1}{2}$ b. $(p-1)(q-1)$ c. n

71 Il est plus facile de résoudre d'abord l'exercice 72 qui suit.

- a. n tels arbres suivant le choix du centre i de l'arbre.
 b. Pour $n \geq 2$, il y a $\frac{1}{2}n!$ tels arbres car ils sont tous isomorphes à P_n . Lorsqu'on écrit les $n!$ chaînes sur $\{1, 2, \dots, n\}$, on représente deux fois chacun de ces arbres.

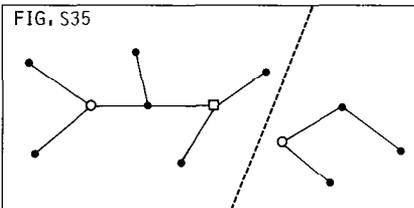
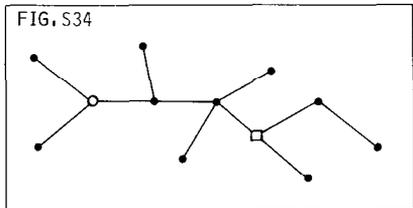
- 72 a. Un seul, soit E_{n-1} . b. Un seul, soit P_n .



74 On définit de façon naturelle les notions de *vertébré biparti* sur $X \cup Y$, d'endofonction alternée sur $X \cup Y$, de chaîne alternée sur $X \cup Y$ et de permutation alternée sur $X \cup Y$. Il y a autant de *vertébrés bipartis* sur $X \cup Y$ (pointés d'abord en X puis en Y) qu'il y a de chaînes alternées d'arborescences pointées alternativement dans X et dans Y . De plus, il y a autant de telles chaînes d'arborescences et autant de ces permutations d'arborescences que d'endofonctions alternées sur $X \cup Y$, soit $n^m \cdot m^n$. Ouf! En d'autres mots, la construction permettant d'associer une endofonction à un *vertébré* fonctionne même si les sommets sont bipartitionnés en noirs et blancs et si les arêtes ou flèches sont toujours entre des sommets de classes différentes.

Finalement, comme il y a nm fois plus de *vertébrés bipartis* que d'arbres bipartis sur $X \cup Y$, on trouve la formule de Scoins.

75 Un *vertébré* est dit *dégénéré* si sa *tête* (le sommet \square) et son *coccyx* (le sommet \circ) coïncident. Il y a, bien sûr, le même nombre de *vertébrés dégénérés* que d'arborescences sur U , soit n^{n-1} si $|U| = n$. Un *vertébré* est dit *non-dégénéré* s'il n'est pas *dégénéré*. Prenons un *vertébré non-dégénéré* (fig. S34) sur U et guillotinons-le, c.-à-d. effaçons son *cou* (la dernière arête de l'unique chaîne de \circ à \square). Une nouvelle tête repousse à la base du cou et on obtient donc un *vertébré* (*dégénéré* ou *non-dégénéré*) sur une partie V de U et une arborescence sur son complémentaire W (fig. S35).



Inversement le choix d'une partie V de U , $1 \leq |V| = k < n$, d'un *vertébré* sur V et d'une arborescence sur $W = U - V$ détermine un unique *vertébré non-dégénéré* sur U . Il y a $\binom{n}{k}$ choix pour la partie V , ensuite, il y a k^k choix pour le *vertébré* sur V et $(n - k)^{n-k-1}$ choix pour l'arborescence sur W . On a donc bien

$$n^n - n^{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \cdot k^k (n - k)^{n-k-1}.$$

- 76 Soit k le nombre de points fixes de l'endofonction idempotente f . Bien sûr, on a $1 \leq k \leq n$. Soit $V = \{x \in U \mid f(x) = x\}$ et $q: U - V \rightarrow V$ la fonction définie par $g(x) = f(x)$, $x \in U - V$ (puisque $f^2(x) = f(x)$, on a bien $f(x) \in V$ pour tout $x \in U - V$). Inversement, le choix d'une partie V , $1 \leq |V| = k \leq n$, de U et d'une fonction $g: U - V \rightarrow V$ détermine une unique endofonction idempotente de U dont les points fixes sont V . On a donc bien $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}$ endofonctions idempotentes sur U , $|U| = n$, car il y a $\binom{n}{k}$ choix pour V , $|V| = k$, et k^{n-k} choix pour la fonction g .
- 77 On voit facilement que Δ est une opération commutative et associative sur $\mathcal{P}(A)$. De plus $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ est un élément neutre et S est l'opposé de S , c.-à-d. $\forall S \in \mathcal{P}(A), S \Delta S = \emptyset$. Il est bien connu que \mathbf{Z}_2 est un corps. La fonction $\mathbf{Z}_2 \times \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ fait de $\mathcal{P}(A)$ un espace vectoriel sur \mathbf{Z}_2 car les quatre identités suivantes sont vraies: $(\alpha_1 + \alpha_2)S = (\alpha_1 S) \Delta (\alpha_2 S)$, $\alpha(S_1 \Delta S_2) = (\alpha S_1) \Delta (\alpha S_2)$, $\alpha_1(\alpha_2 S) = (\alpha_1 \alpha_2)S$ et $1 \cdot S = S$, $\forall \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Z}_2$ et $\forall S, S_1, S_2 \in \mathcal{P}(A)$. De plus, si $B \subseteq A$, alors $B = \Delta_{b \in B} \{b\} = \{b_1\} \Delta \dots \Delta \{b_k\}$ où $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Les singletons engendrent donc $\mathcal{P}(A)$. Puisque les singletons sont deux à deux disjoints, ils sont linéairement indépendants sur \mathbf{Z}_2 , et forment bien une base de $\mathcal{P}(A)$.
- 78 Il est facile de voir que les éléments de V sont les réunions disjointes (y compris \emptyset) de cycles de G . Ici deux cycles sont dits disjoints s'ils n'ont aucune arête commune. En d'autres mots, les éléments de V sont les ensembles d'arêtes engendrant des graphes pairs. Soit $T = (X, B)$ un squelette de $G = (X, A)$. Numérotons de 1 à $m - n + k$ les arêtes de $A - B$ et soit c_i le cycle associé à l'arête $a_i \in A - B$. Comme dans le système fondamental $\{c_1, c_2, \dots, c_{m-n+k}\}$ de cycles associé à T , le cycle c_i est le seul à contenir l'arête a_i , il est clair que c_i n'est pas combinaison linéaire des c_j , $j \neq i$. Le système est donc un sous-ensemble linéairement indépendant de V . Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que tout cycle (et donc tout élément de V) est somme (c.-à-d. somme modulo 2) de cycles du système fondamental. L'espace vectoriel V est donc de dimension $\chi(G) = m - n + k$.
- 79 Semblable à l'exercice 78.
- 80 Soit $G = C_4 = (X, A)$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{a, b, c, d\}$, où $a = \{1, 2\}$, $b = \{2, 3\}$, $c = \{3, 4\}$ et $d = \{1, 4\}$. Bien sûr, $\mathcal{P}(A)$ a 16 éléments. On a $V = \{\emptyset, A\}$. Comme $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ sont les seuls séparateurs de G , on a $W = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, A\}$ car $\{a, c\} \Delta \{b, d\} = A$. Dans ce cas, on a $\dim V = 1$, $\dim W = 3$ et $V \subseteq W$.
- 81 a. G est symétrique ssi $\forall x \forall y, (x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \in U$ ssi $\forall x \forall y, (x, y) \in U \Leftrightarrow (y, x) \in U$ ssi $\forall x \forall y, y \in \Gamma(x) \Leftrightarrow x \in \Gamma(y)$ ssi $\forall x \forall y,$

$y \in \Gamma(x) \iff y \in \Gamma^{-1}(x)$ ssi $\forall x, \Gamma(x) = \Gamma^{-1}(x)$ ssi $\Gamma = \Gamma^{-1}$ ssi $G = (X, \Gamma) = (X, \Gamma^{-1}) = G^{-1}$.

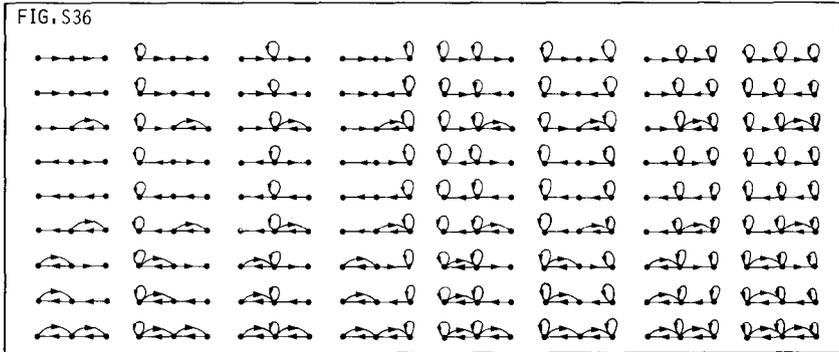
- b. Notons d'abord que: $y \in \Gamma^k(x) \iff$ il existe un chemin de longueur k de x à y . Si G est transitif et $y \in \Gamma^k(x), k > 0$, alors $\exists x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = y$ tels que $(x_i, x_{i+1}) \in U$ pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, et donc $(x, y) \in U$, c.-à-d. $y \in \Gamma(x)$. En d'autres mots, $\forall x, \Gamma(x) \cup \Gamma^2(x) \cup \dots = \Gamma(x)$. Si, de plus, G est réflexif, alors $\forall x, \{x\} \subseteq \Gamma(x)$ et on a bien $\hat{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$, c.-à-d. $G = (X, \Gamma) = (X, \hat{\Gamma}) = \hat{G}$. Réciproquement, si $G = \hat{G}$, alors $\forall x, \{x\} \subseteq \hat{\Gamma}(x) = \Gamma(x)$ et G est bien réflexif. Si $G = \hat{G}$, on a également $\Gamma^2(x) \subseteq \Gamma(x), \forall x$; c.-à-d. $\forall y, \forall z, y \in \Gamma(x)$ et $z \in \Gamma(y)$ implique $z \in \Gamma(x)$. Ce qui veut dire $\forall x, \forall y, \forall z, (x, y) \in U$ et $(y, z) \in U$ implique $(x, z) \in U$ et G est bien transitif.
- c. Si G est fortement connexe et $(x, y) \in X \times X$, alors il existe un chemin, disons de longueur k , de x à y . On a alors $y \in \Gamma^k(x) \subseteq \hat{\Gamma}(x)$ et comme $(x, y) \in X \times X$ est arbitraire, $\hat{G} = (X, X \times X)$. La réciproque est toute aussi évidente.

82 Prouvons ceci par récurrence sur $n = |G|$. Si $n = 1$, c'est évident. Supposons que tout graphe complet d'ordre n ait cette propriété. Soit $G = (X, U)$ un graphe complet d'ordre $n + 1$ et $x \in X$. Bien sûr, $G - x = (X - x, U \cap ((X - x) \times (X - x)))$ est un graphe complet d'ordre n . Il y a donc un chemin $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dans $G - x$ où $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = X - x$. Si $(x, x_1) \in U$, alors $[x, x_1, x_2, \dots, x_n]$ est le chemin cherché dans G . Supposons donc $(x_1, x) \in U$ (puisque G est complet, on a $(x, x_1) \in U$ ou $(x_1, x) \in U$). Si $(x, x_2) \in U$, alors $[x, x_2, x_2, \dots, x_n]$ est le chemin cherché, supposons donc $(x_2, x) \in U$. De même, on peut supposer $(x_3, x) \in U, \dots, (x_n, x) \in U$; mais alors $[x_1, x_2, \dots, x_n, x]$ est le chemin cherché. Dans tous les cas, il existe un chemin hamiltonien dans G .

Ce résultat s'appelle "le paradoxe du journaliste": un journaliste, en consultant le tableau (matrice d'adjacence) des résultats d'un tournoi rotation (tout le monde joue contre tout le monde) entre n joueurs, peut toujours en tirer un chemin $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ où $\{x_1, \dots, x_n\} = \{\text{joueurs}\}$ et $\forall i = 1, 2, \dots, n-1, x_i$ a battu x_{i+1} . De plus, il peut très bien arriver que x_1 soit le dernier joueur du tournoi et x_n le gagnant du tournoi! Dans ce dernier cas, x_1 peut se dire meilleur que x_n car il a battu quelqu'un qui a battu quelqu'un qui... qui a battu x_n .

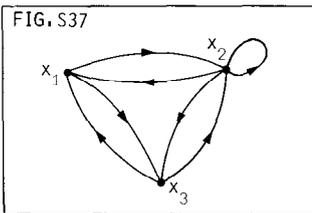
83 Notons qu'une chaîne sans boucle de longueur k dans le graphe orienté $G = (X, U)$ est exactement une chaîne de longueur k dans le graphe simple associé $G' = (X, A)$, où $\{x, y\} \in A$ ssi $x \neq y$ et $((x, y) \in U$ ou $(y, x) \in U)$. On a donc bien: G connexe $\iff G'$ connexe.

84 Lorsqu'on cherche un graphe orienté associé à $G = (X,A)$, pour chacune des m arêtes, on a trois possibilités (une flèche dans un sens ou dans l'autre, ou les deux flèches dans les deux sens), et, pour chacun des n sommets, on a deux possibilités (mettre ou ne pas mettre une boucle). Il y a donc un total de $2^n \cdot 3^m$ possibilités. La figure S36 illustre ceci pour le graphe simple P_3 . Elle constitue également une excellente punition à donner à un étudiant trop dissipé durant un cours de théorie des graphes.



85 $\forall x \in X, d^+(x) = d^-(x)$. Même preuve que pour le théorème d'Euler (page 18).

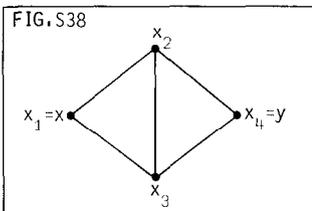
86 Numérotons les sommets (fig. S37). Soit M la matrice d'adjacence.



$$\text{On a } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M^4 = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 8 \\ 12 & 17 & 12 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix}.$$

Comme $\text{tr}M^4 = 35$, il y a 35 circuits de longueur 4 dans G .

87 Numérotons les sommets (fig. S38). Soit M la matrice d'adjacence.



$$\text{On a } M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, M^5 = \begin{bmatrix} 18 & 29 & 29 & 18 \\ 29 & 32 & 33 & 29 \\ 29 & 33 & 32 & 29 \\ 18 & 29 & 29 & 18 \end{bmatrix}.$$

Il y a donc 18 chaînes de longueur 5 de x à y .

88 Si G n'a pas de circuit de longueur > 0 , alors il ne contient aucun chemin de longueur n . On a alors $M^n = 0$ et M est bien une matrice nilpotente.

Réciproquement, supposons $M^k = 0$. Supposons que c soit un circuit de longueur $\ell > 0$, au sommet x_i . On a donc $m_{ii}^{(\ell)} > 0$, mais également $m_{ii}^{(2\ell)} > 0$, $m_{ii}^{(3\ell)} > 0$, ... Soit j tel que $j\ell \geq k$, alors $M^k = 0 \Rightarrow M^{j\ell} = 0 \Rightarrow m_{ii}^{(j\ell)} = 0$. Contradiction.

89 Tout triangle, disons de sommets x, y, z détermine six cycles de longueur 3 de G : $[x, y, z, x]$, $[x, z, y, x]$, $[y, x, z, y]$, $[y, z, x, y]$, $[z, x, y, z]$ et $[z, y, x, z]$. Il y a donc six fois plus de cycles de longueur 3 que de triangles dans G . Or le nombre de tels cycles est la somme des entrées de la diagonale de la matrice M^3 , c.-à-d. la trace de M^3 .

90 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow c_{ij} > 0 \Leftrightarrow \exists$ un chemin de longueur non-supérieure à $n - 1$ de x_i à $x_j \Leftrightarrow \exists$ un chemin de x_i à $x_j \Leftrightarrow$ l'entrée ij de la matrice $M(\hat{G})$ est non-nulle.

91 a.
$$\begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

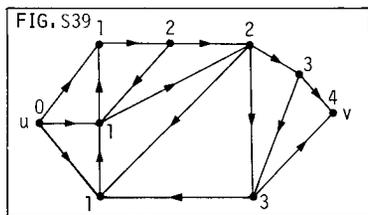
b.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e.
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

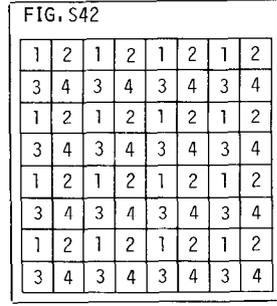
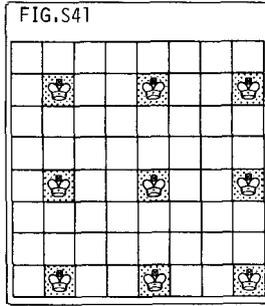
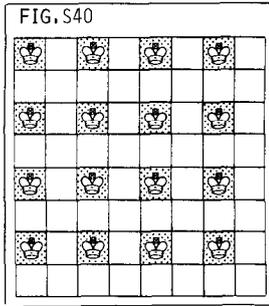
92 Voir fig. S39.



93
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

94 $\alpha(D_n) = n, \beta(D_n) = n, \gamma(D_n) = 1$
 $\alpha(K_n) = 1, \beta(K_n) = 1, \gamma(K_n) = n.$

95 $\alpha(R_8) = 16$ (fig. S40), $\beta(R_8) = 9$ (fig. S41), $\gamma(R_8) = 4$ (fig. S42).



$$96 \quad \alpha(C_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \text{ i.e. } \alpha(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

$$\beta(C_n) = \begin{cases} k & \text{si } n = 3k \\ k+1 & \text{si } n = 3k+1 \\ k+1 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}, \text{ i.e. } \beta(C_n) = \lceil \frac{n+2}{3} \rceil.$$

$$\gamma(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

$$\alpha(R_n) = \alpha(C_n).$$

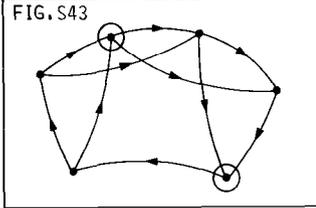
$\beta(R_n) = 1$ car $\{0\}$ est absorbant.

$$\gamma(R_n) = \gamma(C_n) + 1.$$

97 Soit $n = \text{ord}G$. On sait que $\gamma(G) + \alpha(G) \leq n + 1$ et $\gamma(G) \cdot \alpha(G) \geq n$. Si $\gamma(G) + \alpha(G) = \gamma(G) \cdot \alpha(G) + 1$, alors $n + 1 \geq \gamma(G) + \alpha(G) = \gamma(G) \cdot \alpha(G) + 1 \geq n + 1$. On a donc $\gamma(G) \cdot \alpha(G) = n$ et $\gamma(G) + \alpha(G) = n + 1$; d'où $\alpha(G) = n$ et $\gamma(G) = 1$, ou, $\alpha(G) = 1$ et $\gamma(G) = n$. Dans le premier cas, G ne peut être que le graphe discret. Dans le second cas, G ne peut être que le graphe complet. Si G est un graphe simple tel que $\gamma(G) + \alpha(G) = \gamma(G) \cdot \alpha(G) + 1$, on a donc $G \cong D_n$ ou $G \cong K_n$ (où $n = \text{ord}G$).

98 Bien sûr, $\gamma(K_{k,\ell}) = 2$, car $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ et $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_\ell\}$ sont deux ensembles intérieurement stables. Notez que $\alpha(K_{k,\ell}) = \max\{k, \ell\}$ et que $\beta(K_{k,\ell}) = 2$ (sauf si $k = 1$ ou $\ell = 1$ car $\beta(K_{1,1}) = \beta(K_{1,\ell}) = 1$).
Soit $\ell \geq k \geq 1$, alors $q(K_{k,\ell}) = \ell$. En effet, puisque $d(x_1) = \ell$, on a $q(K_{k,\ell}) \geq \ell$. Colorions l'arête $\{x_i, y_j\}$ de la couleur $i + j - 1$, si $i + j - 1 \leq \ell$, et de la couleur $i + j - \ell - 1$ sinon. Ceci est un coloriage des arêtes de $K_{k,\ell}$ avec ℓ couleurs.

99 Il est facile de voir que $\alpha(G) = 2$. Cependant, aucun ensemble de cardinalité 2 (ou 1) n'est extérieurement stable. La figure S43 donne un noyau du graphe orienté $G - x$.

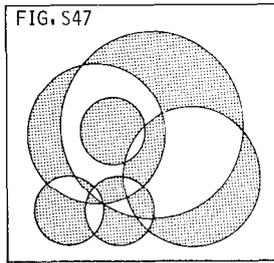
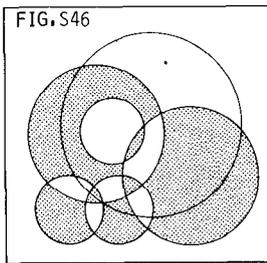
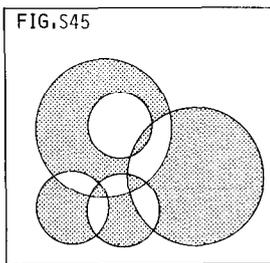


100 Puisque $\alpha(\mathcal{D}_8) = 8$, on a $\gamma(\mathcal{D}_8) \geq 8$. De plus, si $\gamma(\mathcal{D}_8) = 8$, c'est qu'il y a huit ensembles intérieurement stables, de huit éléments chacun, formant une partition des 64 cases. On vérifie, de préférence par ordinateur, qu'il n'y a pas, parmi les 92 solutions au problème des 8 dames, huit ensembles disjoints. On a donc $\gamma(\mathcal{D}_8) \geq 9$. La figure S44 montre que $\gamma(\mathcal{D}_8) = 9$. Elle est due à R. Godin (1975).

FIG. S44

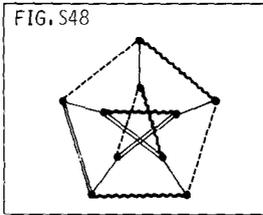
3	7	4	8	5	1	6	9
6	5	1	9	2	4	8	7
1	9	6	5	8	7	3	2
7	4	8	2	3	5	1	6
8	3	7	1	4	6	2	5
9	1	5	6	7	8	4	3
5	6	2	4	9	3	7	8
4	8	3	7	6	2	5	1

101 Un noyau n'est rien d'autre qu'un système de représentants pour la relation d'équivalence "avoir la même cardinalité" sur les sous-ensembles de E. Il est clair que cette relation d'équivalence admet $n + 1$ classes, ayant respectivement $\binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n} = 1$ éléments. Il y a donc $\prod_{i=0}^n \binom{n}{i}$ noyaux.



102 Prouvons, par récurrence sur n , que toute carte obtenue en traçant n cercles dans le plan peut être coloriée avec deux "couleurs", disons noir et blanc. Pour $n = 1$, ceci est évident. Considérons $n + 1$ cercles et avant de tracer le $(n + 1)^{\text{e}}$ cercle, colorions (fig. S45) en noir et blanc la carte obtenue en traçant les n premiers cercles. Ce coloriage existe par hypothèse d'induction. Traçons le $(n + 1)^{\text{e}}$ cercle (fig. S46) et "renversons" le coloriage des régions à l'intérieur du $(n + 1)^{\text{e}}$ cercle (fig. S47). Il est clair qu'on a ainsi obtenu un 2-coloriage de la carte formée des $n + 1$ cercles.

103 Puisque G est cubique, on a $q(G) \geq 3$. Cependant, si $q(G) = 3$, alors tout coloriage des arêtes de G (à l'aide de 3 couleurs) définirait une factorisation linéaire de G . Une telle factorisation linéaire n'existe pas, (exercices 61 et 65). La figure S48 montre que $q(G) = 4$.



104 a. $\gamma(G) = 1 \Leftrightarrow G$ ne contient aucune arête $\Leftrightarrow G$ est discret.

- b. Supposons $\gamma(G) = 2$. Soit Y et Z les sommets de chacune des deux couleurs d'un 2-coloriage de G . Alors $\{Y, Z\}$ est une bipartition de G et G est biparti et non discret. Si G est biparti et non discret, alors $\gamma(G) > 1$. Toute bipartition de G définit alors un coloriage des sommets de G à l'aide de deux couleurs et donc $\gamma(G) = 2$.

105 a. En fait, voici tous les chemins de 1 à 100 ainsi que leur coût.

[1,100], 100; [1,50,100], 52; [1,25,100], 29; [1,25,50,100], 29;
 [1,20,100], 25; [1,10,100], 20; [1,10,50,100], 17; [1,10,20,100], 17;
 [1,5,100], 25; [1,5,50,100], 17; [1,5,25,100], 14; [1,5,20,100], 14;
 [1,5,10,100], 22; [1,5,10,50,100], 14; [1,5,10,20,100], 14; [1,4,100], 29;
 [1,4,20,100], 14; [52]; [1,2,50,100], 29; [1,2,20,100], 17;
 [1,2,10,100], 17; [1,2,10,50,100], 14; [1,2,10,20,100], 14;
 [1,2,4,100], 29; [1,2,4,20,100], 14; [1,5,25,50,100], 14.

Il y a donc 9 chemins de valeur minimum 14.

Ils correspondent aux deux factorisations suivantes de 100:

$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 = 100$, $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$.

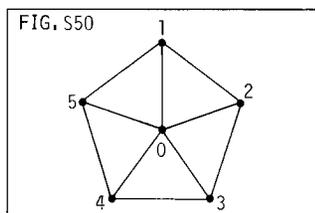
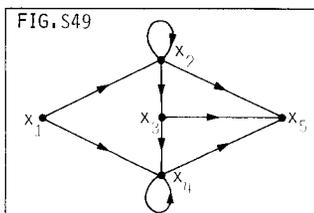
- b. [1,2,4,8,16,32,64].
- c. Les seuls chemins de coût supérieur à 52 sont [1,k] où $k > 52$.
- 106 a. Un réseau routier où on pose $\gamma(u)$ = le nombre maximum de véhicules pouvant emprunter la route u durant une heure.
- b. Les rivières d'un pays où la valeur $\gamma(u)$ est la force du courant, ou le nombre de poissons traversant u , ou la longueur de u entre ses deux sommets.
- c. Un réseau téléphonique où les sommets sont les téléphones et $\gamma(x,y)$ est le nombre d'appels de x à y durant une année.
- d. Le graphe orienté des résultats d'un tournoi d'échecs où $\gamma(x,y)$ est le nombre de coups dans la partie gagnée par le joueur x contre le joueur y (ou encore la durée de la partie).
- e. Le graphe orienté d'une compagnie de location d'automobiles, où les sommets sont les bureaux de location et $\gamma(x,y)$ est le nombre d'automobiles,

louées en x et retournées en y, durant une certaine période de temps.

107 Numérotons les sommets, comme dans la figure S49. La matrice C et ses puissances (spéciales) successives sont:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & 10 & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty & 11 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 10 & 11 \\ \infty & 0 & 2 & 4 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 9 & 11 \\ \infty & 0 & 2 & 4 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^4 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ \infty & 0 & 2 & 4 & 5 \\ \infty & \infty & 0 & 2 & 3 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix} = C^5 = M$$



108 Le graphe simple R_5 est donné par la figure S50. La matrice C et ses puissances (spéciales) successives sont:

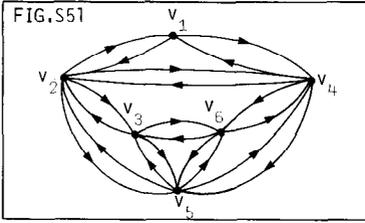
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \infty & \infty & 1 & 0 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = C^3 = M.$$

109	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	p	A
	∞	∞	∞	∞	0	x_5	$\{x_5\}$
	∞	6	∞	∞	0	x_2	$\{x_2, x_5\}$
	12	6	9	15	0	x_3	$\{x_2, x_3, x_5\}$
	11	6	9	15	0	x_1	$\{x_1, x_2, x_3, x_5\}$
	11	6	9	13	0	x_4	STOP: $\lambda_4 = 13$

$$110 \begin{bmatrix} 0 & 10 & 18 & 10 \\ 5 & 0 & 17 & 15 \\ 15 & 18 & 0 & 5 \\ 10 & 20 & 28 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = [x_5, x_2, x_3, x_1, x_4].$$

111 a. $[v_1, v_4, v_6]$, $[v_1, v_2, v_4, v_6]$ et $[v_1, v_2, v_5, v_6]$ sont trois chemins minimums, de valeur 9, de v_1 à v_6 . Ceci n'est pas indispensable, mais on peut représenter le graphe orienté par la figure S51.

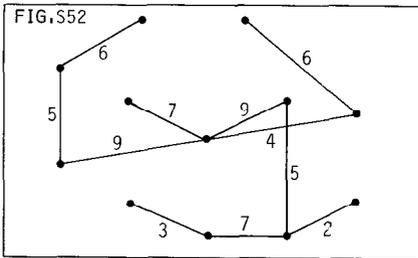


b. Il suffit d'ajouter à la durée du vol de v_i à v_j , $j \neq 6$, la durée de l'escale en v_j . La nouvelle matrice des valeurs, C' , permet ensuite de trouver l'itinéraire $[v_1, v_4, v_6]$ de durée 10 heures.

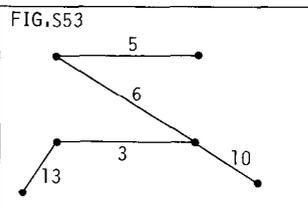
$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ 5 & 0 & 6 & 3 & 8 & \infty \\ \infty & 7 & 0 & \infty & 8 & 3 \\ 8 & 5 & \infty & 0 & 8 & 4 \\ \infty & 7 & 5 & 6 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 6 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Une autre méthode consiste à remplacer chacun des sommets v_i , $1 \leq i \leq 6$, par une flèche (v_i, v'_i) dont la valeur est la durée de l'escale en v_i . Il suffit ensuite de trouver le chemin minimum de v'_1 à v_6 .

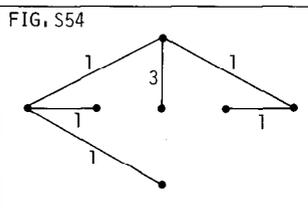
112 On trouve l'arbre partiel (fig. S52) de valeur 63.

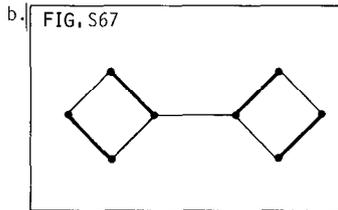
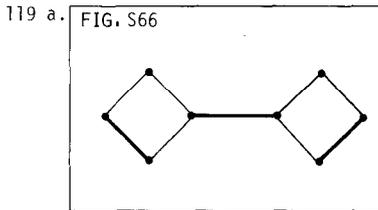
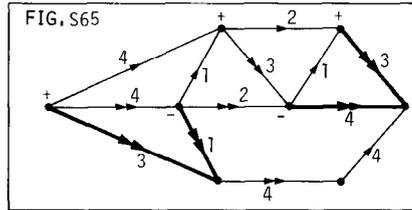
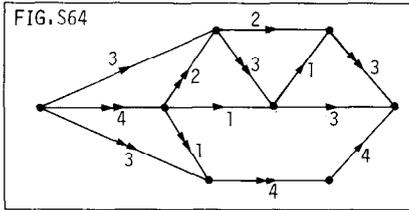


113 a.



b.





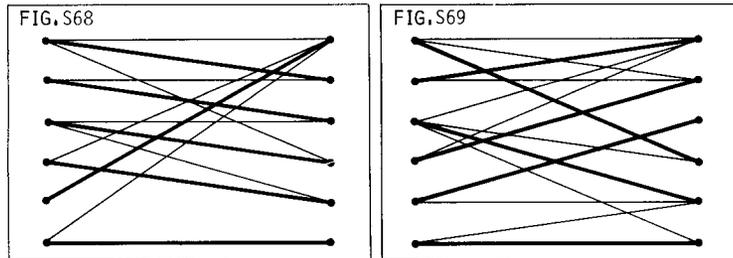
- 120 a. Il y a le couplage $M = \{\{x_i, y_i\} | 1 \leq i \leq n\}$. En fait, toute permutation $\gamma: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ détermine le couplage parfait $M_\gamma = \{\{x_i, y_{\gamma(i)}\} | 1 \leq i \leq n\}$ et, inversement, les couplages parfaits de $K_{n,n}$ ont tous cette forme. Il y a donc $n!$ couplages parfaits de $K_{n,n}$.
- b. Les arêtes $\{(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, 0), (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, 1)\}$, où $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ est un sommet de B_{n-1} , forment un couplage parfait de B_n .
- c. Les n rayons du graphe de Petersen généralisé, c.-à-d. les n arêtes de la forme $\{x_i, y_i\}$, constituent un couplage parfait de $P(n, k)$.
- d. $\{\{2i-1, 2i\} | 1 \leq i \leq n\}$ est un couplage parfait de K_{2n} . Il est facile de voir qu'il y a $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$ couplages parfaits de K_{2n} .

121 Non, car une solution établirait une bijection entre les 32 cases noires et les 30 cases blanches. Si on considère le graphe simple $G = (X, A)$, où $X = \{62 \text{ cases}\}$ et où $\{x, y\} \in A \iff x$ et y ont un côté en commun, alors G est biparti. En fait, $\{x_1, x_2\}$, où $X_1 = \{30 \text{ cases blanches}\}$ et $X_2 = \{32 \text{ cases noires}\}$, est évidemment une bipartition de G . Un recouvrement de G , à l'aide de 31 pièces de domino, déterminerait un couplage parfait de G . Ceci est absurde car $32 \neq 30$. En particulier, l'existence de ce couplage parfait (et donc maximum) contredit le théorème de Hall car pour $S = X_2$, $|V(S)| < |S|$.

122 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple biparti régulier de degré $k > 1$. Alors, par le théorème des mariages, il existe un couplage parfait $B_1 \subseteq A$. Le graphe simple $L_1 = (X, A - B_1)$ est alors un facteur linéaire de G . Comme le graphe simple $(X, A - B_1)$ est également biparti et régulier de degré $k - 1$, prenons $L_2 = (X, B_2)$, un facteur linéaire de $(X, A - B_1)$ (et donc de G), et ainsi de suite. On trouve finalement une factorisation linéaire $\{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ de G .

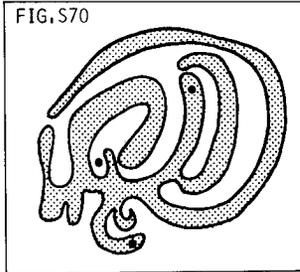
123 On cherche un couplage maximum pour le graphe biparti donné par la figure 141. Par exemple, celui de la figure S68 attribue des emplois aux 6 travailleurs.

124 On cherche un couplage maximum pour le graphe biparti donné par la figure 142. Par exemple, celui de la figure S69 attribue aux 6 clubs des représentants.



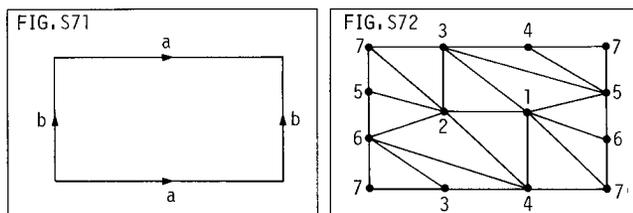
125 Voir [8] pages 102 et 103. Grosso modo, on y démontre que la parité de n ne dépend que de p et est une fonction continue de $p \in \mathbb{R}^2 - C$. La parité de n demeure donc constante sur chacune des deux composantes connexes, ζ et ξ , de $\mathbb{R}^2 - C$. Comme il existe $p_1 \in \xi$, et D_1 partant de p_1 , avec $C \cap D_1 = \emptyset$, et $p_2 \in \zeta$, et D_2 partant de p_2 , avec $|C \cap D_2| = 1$, la conclusion en découle.

FIG.S70



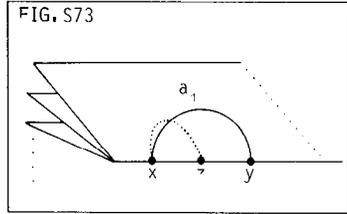
Dans la figure S70, l'intérieur ζ de C est foncé.

126 Comme K_5 et K_6 sont des sous-graphes de K_7 , et comme $K_{3,3}$ est isomorphe à un sous-graphe de K_6 , il est suffisant de trouver un plongement de K_7 dans T . Considérons le tore T comme un rectangle dont on colle les côtés opposés a et b (fig. S71). La figure S72 décrit un plongement de K_7 dans T .

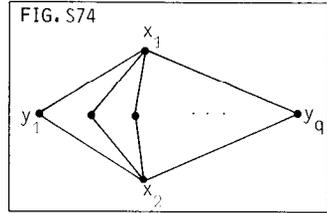


127 Un graphe simple $G = (X, A)$ est dit spatial si, pour tout $x \in X$, on peut choisir un point p_x dans \mathbb{R}^3 et pour toute arête, $a = \{x, y\} \in A$, on peut choisir une courbe simple dans \mathbb{R}^3 de p_x à p_y de sorte que ces courbes soient, ou disjointes, ou reliées par une ou deux extrémités. Montrons que cette notion n'a pas d'intérêt car tout graphe simple est spatial. Soit $G = (X, A)$,

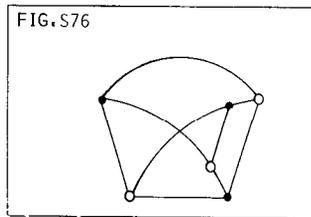
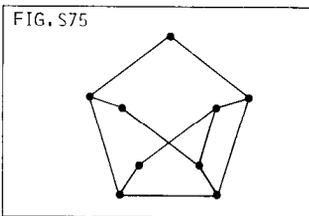
où $|X| = n$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Choisissons m plans qui, deux à deux, ont toujours comme intersection l'axe des x . Prenons n points distincts $p_x, x \in X$, sur l'axe des x , et traçons la courbe correspondant à l'arête a_i dans le $i^{\text{ème}}$ plan (fig. S73). Il est clair que ceci décrit un plongement de G dans \mathbb{R}^3 .



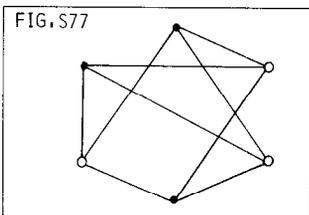
- 128 a. $K_{p,q}$ est non-planaire si $p \geq 3$ et $q \geq 3$. Bien sûr, $K_{1,q} \cong E_q \cong K_{q,1}$ est planaire. La figure S74 montre que $K_{2,q} \cong K_{q,2}$ est également planaire.



- b. R_n est planaire ssi $n \leq 3$.
- c. La figure S75 est un sous-graphe du graphe simple de la figure 158. C'est une subdivision de la figure S76 qui elle est isomorphe à $K_{3,3}$.



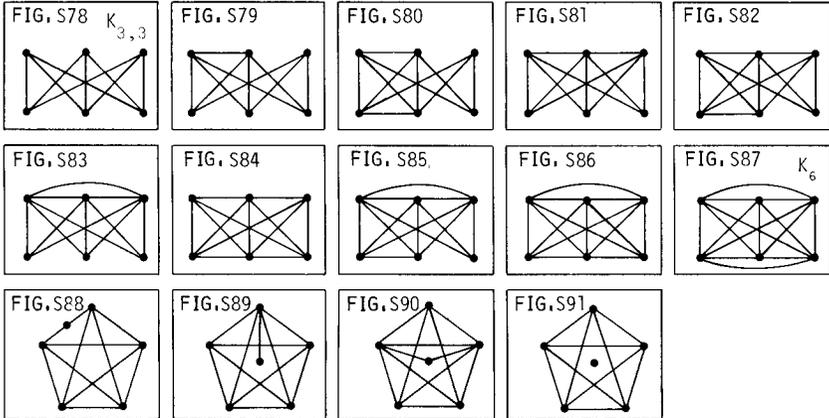
- d. Dans ce graphe simple, on a $n = 6$ et $m = 13$. Comme l'inégalité $m < 3n - 6$ n'est pas vérifiée, le graphe est non-planaire. On peut aussi remarquer que ce graphe simple contient un graphe partiel (fig. S77) isomorphe à $K_{3,3}$.



129 Il est clair que K_5 est l'unique graphe simple non-planaire d'ordre 5 ou moins. Pour obtenir un graphe simple non-planaire d'ordre 6, on peut (par le théorème de Kuratowski):

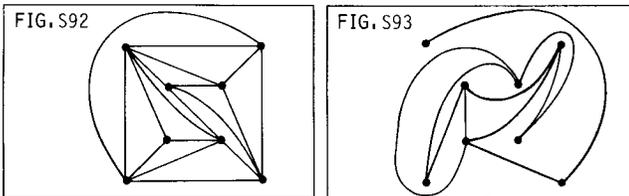
- I- ajouter des arêtes à $K_{3,3}$;
- II- ajouter des arêtes à une subdivision de K_5 ;
- III- ajouter un sommet et des arêtes à K_5 .

Les figures S78 à S91 donnent (à isomorphisme près) les 14 graphes simples non-planaires d'ordre 6. Pour ne pas répéter un même graphe simple deux fois, il est bon de se souvenir que $G_1 \approx G_2$ ssi $\bar{G}_1 \approx \bar{G}_2$.



130 Soit $G = (X, A)$, où $n = |X| \geq 11$, $m = |A|$ et $m' = \binom{n}{2} - m$. Si G et \bar{G} sont tous deux planaires, alors $m \leq 3n - 6$ et $m' \leq 3n - 6$, et donc $\binom{n}{2} = m + m' \leq 6n - 12$. Ceci est absurde car alors $n^2 + 24 \leq 13n$ (ce qui est faux pour $n = 11, 12, \dots$).

- 131 a. Le graphe simple, donné par la figure S92, est planaire. Son complémentaire (fig. S93) l'est également.
- b. Le graphe simple $K_{5,3}$ est non-planaire. Son complémentaire contient, comme composante connexe, un sous-graphe isomorphe à K_5 ; il est donc également non-planaire.



132 a. $9 - 11 + 4 = 2$

b. $12 - 16 + 6 = 2$

133 a. Soit F_1, F_2, \dots, F_k les composantes connexes de F , et, pour $1 \leq i \leq k$,

x_i un sommet de F_i qui touche à la face infinie de F . Soit c_i une courbe de x_i à x_{i+1} , $1 \leq i < k$, avec $c_i \cap F = \{x_i, x_{i+1}\}$. Supposons de plus que $\forall 1 \leq i \leq k-1$, $c_i \cap c_{i+1} = \{x_{i+1}\}$ et $c_i \cap c_j = \emptyset$ si $|i - j| \geq 2$. Considérons la figure planaire connexe F' obtenue de F en ajoutant les $k-1$ courbes c_i . La formule d'Euler, appliquée à F' , donne $n - (m + k - 1) + f = 2$. On a donc bien $n - m + f = k + 1$.

b. Pour la figure 163, on a $n - m + f = k + 1 = 7$.

134 a. Considérons la figure planaire obtenue en traçant le cercle et les cordes (voir fig. S94 où $n = 6$). Il y a n sommets (dits extérieurs) sur le cercle et n' sommets (dits intérieurs) à l'intérieur du cercle. Comme tout choix de quatre sommets extérieurs détermine un quadrilatère dont les deux diagonales se coupent en un sommet intérieur, on a $n' = \binom{n}{4}$. De plus, les sommets intérieurs sont de degré égal à 4 et les sommets extérieurs de degré égal à $n + 1$. Le lemme des poignées de mains donne l'équation:

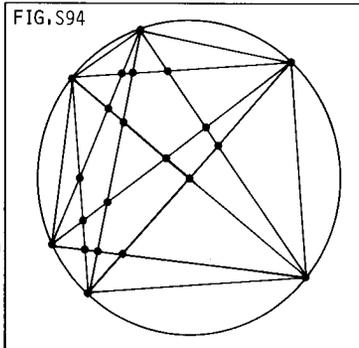
$$4 \binom{n}{4} + n(n + 1) = 2m$$

et la formule d'Euler donne l'équation:

$$n + \binom{n}{4} - m + f = 2.$$

Le nombre de régions est donc

$$\begin{aligned} f - 1 &= 1 - n - \binom{n}{4} + 2 \binom{n}{4} + \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}. \end{aligned}$$

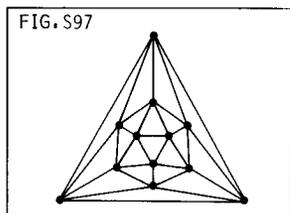
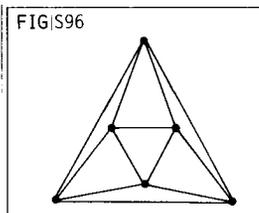
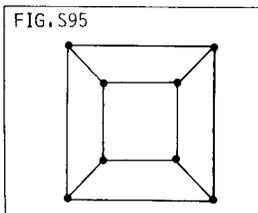


b. En posant $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots$, dans la formule précédente, on trouve respectivement 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, ...

135 On prouve d'abord que $4f \leq 2m$. La formule d'Euler donne ensuite

$$n - m + \frac{1}{2}m \geq 2, \text{ c.-à-d. } m \leq 2n - 4.$$

136 On obtient pour le tétraèdre, le cube, le dodécaèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre, respectivement, les graphes planaires donnés par les figures 3, S95, 32, S96 et S97.

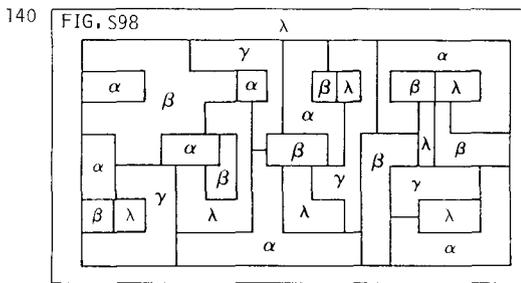


137 Si P est un polyèdre régulier ayant n sommets, m arêtes et f faces, alors son dual P' sera un polyèdre régulier ayant f sommets, m arêtes et n faces.

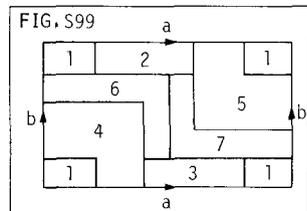
Le dual du cube est l'octaèdre (et réciproquement); le dual du dodécaèdre est l'icosaèdre (et réciproquement); le tétraèdre est son propre dual.

138 (Voir exercice 102). Soit n le nombre de droites. Pour $n = 1$, le résultat est évident. Supposons le résultat vrai pour $n = k$ et soit C une carte obtenue en traçant $k + 1$ droites. Soit D une de ces droites et C' la carte obtenue en traçant toutes ces droites sauf D . Par hypothèse de récurrence, il existe un 2-coloriage de la carte C' . D'un côté de la droite D , gardons ce coloriage tandis que de l'autre côté, inversons-le (c.-à-d. noir devient blanc et blanc devient noir). On obtient ainsi un 2-coloriage de la carte C .

139 Ceci découle du fait que si une courbe fermée simple c est obtenue en mettant bout-à-bout des courbes simples, c_1, c_2, \dots, c_k , et si p est un point à l'intérieur de c , alors il existe des courbes simples α_i , $1 \leq i \leq k$, telles que α_i va de p à un point strictement entre les extrémités de c_i , et telles que $\forall i, j, \alpha_i \cap \alpha_j = \{p\}$.



141 Comme dans la solution de l'exercice 126, considérons le tore T (fig. 157) comme étant un rectangle dont on a collé les côtés opposés (fig. S71). La figure S99 décrit une carte sur T possédant sept pays, ayant tous, deux à deux, une frontière commune. Pour cette carte C , on a donc $\gamma(C) = 7$. Il a été démontré que toute carte sur T peut être coloriée à l'aide de 7 couleurs (ou moins). Plus précisément, G. Ringel et J.W.T. Young ont prouvé (c'est l'objet de leur livre "Map color theorem", Springer-Verlag, Berlin, 1974; qui démontre ce résultat) que toute carte sur le tore à n trous, $n \geq 1$, peut être coloriée avec au plus $\left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48n}}{2} \right\rceil$ couleurs (où $\lceil x \rceil$ désigne le plus grand entier m tel que $m \leq x$). Cette expression est souvent appelée *formule de Heawood*.



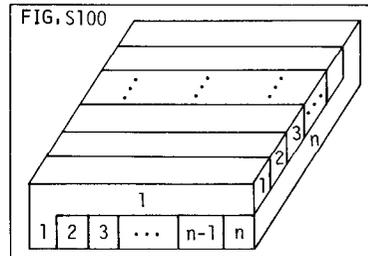
142 Choisissons un sommet quelconque p_0 de C . Colorions, alternativement noir et blanc, les faces autour de p_0 (c.-à-d. ayant p_0 sur leur frontière). Ceci est possible puisque $\deg p_0$ est pair. Si p est un sommet sur la frontière

de deux faces adjacentes dont l'une est coloriée et l'autre ne l'est pas, on refait la même opération autour de p pour colorier les autres faces ayant p sur leur frontière. Comme C est connexe, ce procédé donne finalement un 2-coloriage de C .

143 Soit α , β et γ trois couleurs. Colorions, avec α , une face quelconque, F_0 , de C . Colorions ensuite les faces (en nombre pair) adjacentes à F_0 en faisant alterner β et γ . Si F' n'est pas coloriée mais est adjacente à F , qui, elle, est de la couleur, disons λ_1 , alors colorions F' de la couleur, disons λ_2 , et alternons, autour de F' , entre les couleurs λ_1 et λ_3 , où $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Il est facile de se convaincre que ceci conduit à un 3-coloriage de C .

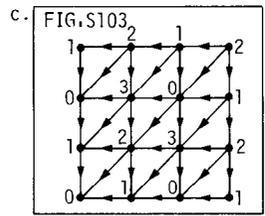
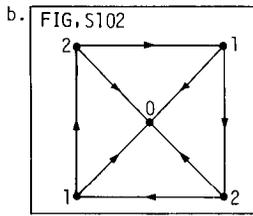
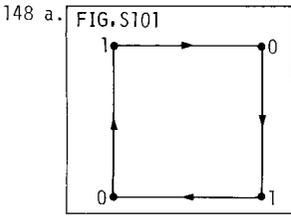
144 Tout polyèdre convexe doit contenir au moins une face ayant 3, 4 ou 5 côtés.

145 Un tel entier n'existe pas. La figure S100 décrit n régions, chacune obtenue en collant ensemble deux longs parallélépipèdes. Ces n régions, ainsi que la région extérieure (infinie), définissent une carte à trois dimensions où deux régions quelconques ont toujours une surface à deux dimensions comme frontière commune. Cette carte nécessite donc $n + 1$ couleurs. Comme l'entier n est quelconque, on voit que seul un nombre infini de couleurs peut permettre de colorier toutes les cartes à trois dimensions.



146 Soit α une face, non-infinie, de F . Associons à α le cycle simple c_α (de G) entourant la face α . Il est facile de voir que ces $f - 1$ cycles forment une base de l'espace des cycles V de G (exercice 78). En effet, si c est un cycle simple, alors il "entoure" des faces, disons, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, et alors $c = \sum_{i=1}^k c_{\alpha_i}$. Par l'exercice 78, on a donc $\chi(G) = f - 1$. La formule $\chi(G) = m - n + 1$, pour le graphe simple connexe G , donne ensuite $n - m + f = 2$.

147 La position initiale est (1,3,6,10). Voici une des nombreuses parties possibles: (1,3,6,10), (1,1,6,10), (1,1,6,4), (0,1,6,4), (0,1,1,4), (0,1,0,4), (0,1,0,1), (0,0,0,1), (0,0,0,0). Noter que la partie a été gagnée par le joueur B bien que le joueur A ait eu une position gagnante au départ. En effet, on a $g(1,3,6,10) = 1 \div 3 \div 6 \div 10 = 14 \neq 0$.



149 La figure S104 représente le graphe orienté, $G_4 + G_2$, du jeu de Fan Tan avec $k = 2$, $n_1 = 4$ et $n_2 = 2$. La figure S105 représente sa fonction de Grundy.

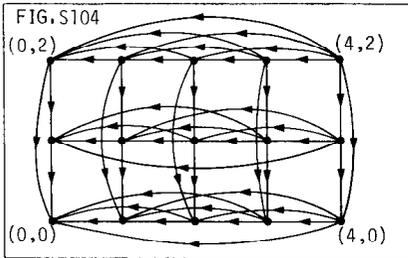


FIG. S105

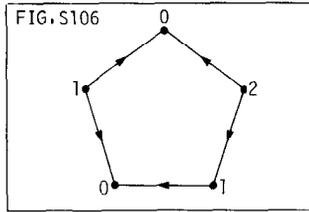
2	3	0	1	6
1	0	3	2	5
0	1	2	3	4

150 Supposons que $G = (X, \lambda)$ et $H = (Y, \gamma)$ sont tous deux eulériens. Soit $c = [x_1, x_2, \dots, x_n, x_1]$ et $c' = [y_1, y_2, \dots, y_m, y_1]$ des circuits eulériens de G et H . Il est facile de voir que le circuit suivant dans $G + H$ est eulérien: $[(x_1, y_1), (x_1, y_2), \dots, (x_1, y_m), (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_2, y_m), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_3, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_1), (x_{n-1}, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_m), (x_n, y_1), (x_n, y_2), \dots, (x_n, y_m), (x_n, y_1), (x_1, y_1)]$. Autrement dit, entre chaque flèche de c , on parcourt complètement le circuit c' .

Inversement, supposons que $G + H$ est eulérien et soit c un circuit eulérien de $G + H$, de (x_1, y_1) à (x_1, y_1) . La suite des flèches de c de la forme $((x_1, y_i), (x_1, y_j))$, où $y_j = \gamma(y_i)$, détermine le circuit eulérien, $[y_1, \dots, y_i, y_j, \dots, y_1]$, de H . De même, on trouve un circuit eulérien dans G . Les graphes orientés G et H sont donc eulériens.

- 151 a. $K_n = (X, e_2^*(X))$, où $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Il est facile de voir que toute bijection, de X sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$, détermine une fonction de Grundy de K_n ; il y en a donc $n!$.
- b. L'ensemble des sommets de $K_{p,q}$ est $\{x_1, x_2, \dots, x_p\} \cup \{y_1, y_2, \dots, y_q\}$. Il y a deux fonctions de Grundy, g et h , sur $K_{p,q}$, définies par:
 $\forall 1 \leq i \leq p, g(x_i) = 0, h(x_i) = 1; \forall 1 \leq j \leq q, g(y_j) = 1, h(y_j) = 0$.
- c. Il y en a précisément quatorze; trouvez-les.

152 Si vous avez réussi à faire cet exercice, relisez votre preuve... car ce résultat est faux. La figure S106 en donne un contre-exemple où $k = 2$.



153 a. Les sommets du graphe orienté G , associé à ce jeu, sont les couples (k, ℓ) , où $0 < k \leq n$ et $0 < \ell \leq m$. Le sommet (k, ℓ) correspond à la situation où il reste k allumettes dans le tas de gauche et ℓ allumettes dans le tas de droite. A la figure S107, on a écrit dans la $(\ell + 1)^{i\text{ème}}$ case de la $(k + 1)^{i\text{ème}}$ colonne la valeur $g(k, \ell)$ où $g: \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow \mathbf{N}$, est une fonction de Grundy (la seule) sur G .

FIG. S107

2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6
3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6	7	4	5	6
3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3	2	1	0	3
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2

Le noyau N de g est $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup N_3$, où $N_i = \{(k, \ell) \mid k \equiv i \pmod{4} \text{ et } \ell \equiv i \pmod{5}\} \subseteq X$. Si $(n, m) \notin N$, alors le joueur A a une stratégie gagnante. Lorsqu'il a à jouer, dans la position (k, ℓ) , où $k \equiv i \pmod{4}$ et $\ell \equiv j \pmod{5}$, $i \neq j$, il prend $j - i$ allumettes à droite si $i < j$ et $i - j$ allumettes à gauche si $j < i$. Si, au contraire, $(n, m) \in N$ (comme c'est le cas à la figure S107), alors c'est le joueur B qui a la même stratégie gagnante.

- b. La figure S108 représente la fonction de Grundy du graphe orienté de ce nouveau jeu.
 Si $g(n, m) \neq 0$, alors le joueur A a une stratégie gagnante qui consiste à entraîner B dans le noyau. Sinon, c'est B qui se sert de cette même stratégie gagnante.

154 a. On a $d(x_0, x) = 8$. L'étrange début de partie qui suit est un chemin de longueur 8 de x_0 à x :

FIG. S108

2	0	1	4	5	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
1	2	0	3	1	2	0	6	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4
0	1	2	6	0	1	4	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	5	3	1	4	5	2	1	4	3	5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	5	0	2	4	3	0	5	4	3	0	5	6	3	0	5	6	3	0	5	6	3	0	5	6	3	0
2	0	1	4	5	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
1	2	0	3	1	2	0	6	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4
0	1	2	6	0	1	4	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	5	3	1	4	5	2	1	4	3	5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	5	0	2	4	3	0	5	4	3	0	5	6	3	0	5	6	3	0	5	6	3	0	5	6	3	0
2	0	1	4	5	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
1	2	0	3	1	2	0	5	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4
0	1	2	6	0	1	4	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	5	3	1	4	7	5	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	5	0	2	6	3	0	4	5	3	0	4	5	3	0	4	5	3	0	4	5	3	0	4	5	3	0
2	0	1	5	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4	1	2	0	4
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

1. C f 3 C f 6 2. C e 5 d 5
 3. C c 6 C f d 7 4. C b 8 C b 8

b. On a $d(x_0, x) = 10$. L'étrange début de partie qui suit est un chemin de longueur 10 de x_0 à x :

1. C f 3 C f 6 2. C c 3 C c 6
 3. C e 5 C d 5 4. C c 6 d c 6
 5. C d 5 c d 5

c. En langage des échecs, on cherche la partie la plus courte se terminant par un pat. Il semble que ce soit la suivante:

1. e 3 a 5 2. D h 5 T a 6
 3. D a 5 h 5 4. h 4 T a h 6
 5. D c 7 f 6 6. D d 7+ R f 7
 7. D b 7 D d 3 8. D b 8 D h 7
 9. D c 8 R g 6 10. D e 6 et les noirs sont pat.

On a donc $d(x_0, x) = 19$.

d. En langage des échecs, on cherche la partie la plus courte se terminant par un pat mais sans qu'il y ait eu de capture. La partie suivante, composée par Sam Loyd, semble la plus courte ([9] page 268):

1. d 4 d 6 2. D d 2 e 5
 3. a 4 e 4 4. D f 4 f 5
 5. h 3 c 5 6. T a 3 F e 7
 7. D h 2 F e 6 8. T g 3 F h 4

9. f 3 D a 5 + 10. C d 2 F b 3
 11. c 4 f 4 12. d 5 e 3 et les blancs sont pat.

On a donc $d(x_0, x) = 24$.

- 155 Supposons que le joueur B a une stratégie gagnante. Alors le joueur A sort et replace son cavalier du roi (c.-à-d. il joue les deux coups consécutifs C g 1 - f 3, C f 3 - g 1). Ensuite le joueur A (qui n'a plus le trait) applique la stratégie gagnante de B. Contradiction.
- 156 Si les pièces blanches sont dans la position initiale, c'est que les blancs ont joué un nombre pair de coups. En effet, les deux tours blanches se sont chacune déplacées un nombre pair de fois. Les deux cavaliers blancs ont bougé chacun un nombre pair (impair) de fois s'ils sont revenus à leur case initiale (s'ils ont été intervertis). Donc, au total, un nombre pair de mouvements. De même, si les pièces noires sont dans la position initiale, c'est que les noirs ont joué un nombre pair de coups. On voit donc que le sommet $x_0 = (p_0, 0)$ est réalisable (de plusieurs façons) mais que le sommet $(p_0, 1)$ ne l'est pas. Notez qu'il semble que la majorité des sommets de ξ soient non-réalisables. En effet, pour qu'un sommet soit non-réalisable, il suffit qu'il y ait, par exemple, un pion sur la première ou la huitième traverse, un roi en triple échec, les deux rois en échec, des pions doublés sans aucune capture, etc.
- 157 a. Le graphe orienté ξ a des milliards de milliards de sommets. Même en écrivant mille positions sur chaque atome de la terre, il nous est impossible de le décrire. Une caractérisation des sommets de ξ appartenant à un noyau n'est guère concevable pour le moment.
- b. Facile... si on a résolu a.



EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

CHAPITRE 1 section 1

- 1 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. La matrice d'incidence (v_{ij}) de G est la matrice $n \times m$ définie par $v_{ij} = 1$ si $x_i \in a_j$ et $v_{ij} = 0$ autrement.
- Que vaut $\sum_{j=1}^m v_{ij}$?
 - Que vaut $\sum_{i=1}^n v_{ij}$?
 - En déduire le lemme des poignées de mains.
- 2 Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples cubiques d'ordre sept ou moins.
- 3 Prouver qu'un graphe simple d'ordre n ayant plus de $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor^2$ arêtes ne peut être biparti. (Ici, $\lfloor x \rfloor$ dénote le plus grand entier non supérieur à x .)
- 4 Prouver que dans un groupe de 6 personnes ou plus, il y en a toujours, ou bien trois se connaissant mutuellement, ou bien trois ne se connaissant pas. Montrer que ceci n'est pas nécessairement vrai s'il n'y a que 5 personnes. (On suppose que "se connaître" est une relation symétrique.)
- *5 Prouver que dans une réunion mondaine composée de 9 personnes, il en existe toujours, ou bien 3 ne se connaissant pas, ou bien 4 se connaissant mutuel-

lement. Montrer que ceci n'est pas nécessairement vrai s'il n'y a que 8 invités.

- 6 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple sans triangle, c.-à-d. ne contenant aucun sous-graphe isomorphe à C_3 . Prouver que si $|X| = 2n$, alors $|A| \leq n^2$. Trouvez un exemple pour lequel $|X| = 2n$ et $|A| = n^2$.
- 7 Soit E un ensemble, $|E| = n \geq 1$. Considérons le graphe simple $G = (X, A)$, où $X = \mathcal{P}^*(E) = \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$, et où, pour $S_1 \subseteq E$ et $S_2 \subseteq E$, on a $\{S_1, S_2\} \in A$ si et seulement si $S_1 \neq S_2$ et $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.
- Décrire le graphe simple \bar{G} .
 - Tracer G et \bar{G} , si $E = \{a, b, c\}$.
 - Pour $S \subseteq E$, $|S| = m \leq n$, que vaut $d(S)$?
 - Combien y a-t-il d'arêtes dans G ?
 - Prouver que G admet $2^n - 2$ sommets impairs et un seul sommet pair.
- *8 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple. Prouver que G est isomorphe au graphe-arête d'un autre graphe simple si et seulement s'il existe une partition P de A telle que:
- $S \in P \Rightarrow S$ est l'ensemble des arêtes d'un sous-graphe complet de G ;
 - $x \in X \Rightarrow \{a \in A \mid x \in a\}$ est, soit une classe de P , soit un sous-ensemble de la réunion de deux classes de P .

Pour un tel graphe simple G , la partition P est-elle unique?

- 9 Un sous-graphe complet maximal d'un graphe simple G est appelé une *clique* de G . Le *graphe-clique* de G est le graphe simple $H = (X, A)$ défini comme suit:
 $X = \{\text{cliques de } G\}$, $\{c_1, c_2\} \in A \Leftrightarrow c_1 \neq c_2$ et $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$.

Trouver le graphe-clique des graphes simples suivants:

- a. K_n b. D_n c. C_n d. $K_{3,3}$ e. R_n .

- 10 Trouver, à isomorphisme près, tous les graphes simples d'ordre 5 ayant 7 arêtes.

- 11 Pour $n \geq 1$, soit $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Considérons le graphe simple $G_n = ([n], A_n)$ où $\{i, j\} \in A_n$ si et seulement si $i \in [n]$, $j \in [n]$, $i \neq j$ et les entiers i et j sont relativement premiers (c.-à-d. n'admettent que 1 comme diviseur commun).

- Tracer G_5 et G_6 .
- Trouver le diamètre, le rayon et les centres de G_n .
- Prouver que $n \leq m \Rightarrow G_n$ est un sous-graphe de G_m .

**d. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n|}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$.

- e. À l'aide de la matrice d'adjacence de $G_{5,0}$, calculer la valeur de π à cinq décimales près.

CHAPITRE 1 section 2

- 12 Pour un multigraphe avec boucles, définir les notions de chaîne et de matrice d'adjacence. Utiliser la matrice d'adjacence du multigraphe avec boucles, représenté par la figure 19, pour en calculer le nombre de chaînes de longueur 5 du sommet x au sommet y .

- 13 Soit $G = (X, A)$ un hypergraphe, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subseteq \mathcal{P}^*(X)$. Les matrices d'adjacence et d'incidence de G sont les matrices $n \times n$ et $n \times m$ respectivement définies par:

$$T = (t_{ij}), \text{ où } t_{ij} = |\{a \in A \mid x_i \in a, x_j \in a\}|,$$

$$S = (s_{ij}), \text{ où } s_{ij} = 1, \text{ si } x_i \in a_j, \text{ et } s_{ij} = 0, \text{ autrement.}$$

- Définir la notion de chaîne dans un hypergraphe.
- Prouvez que l'entrée ij de la matrice T^k donne le nombre de chaînes de longueur k de x_i à x_j dans G .
- Utilisez b. pour calculer le nombre de chaînes de longueur 4 du sommet 1 au sommet 2, dans l'hypergraphe décrit par la figure 20.
- À l'aide de la matrice S , prouver la formule

$$\sum_{x \in X} d(x) = \sum_{a \in A} |a|, \text{ où } d(x) = |\{a \mid x \in a\}|.$$

CHAPITRE 1 section 3

- 14 Prouver que dans tout graphe simple possédant exactement deux sommets impairs, il y a une chaîne simple reliant ces deux sommets.
- 15 Le *calibre* d'un graphe simple est la longueur de son plus court cycle simple. Trouvez le calibre des graphes simples suivants:
- K_n , $n \geq 3$
 - $K_{p,q}$, $p \geq 2$, $q \geq 2$
 - C_n
 - R_n

e. le graphe de Petersen.

16 Considérons la figure 52. Est-il possible

- a. de tracer cette figure sans lever le crayon et sans passer deux fois sur un même trait?
- b. de tracer une courbe plane coupant chacun des 7 segments de cette figure?

Même question pour la figure 22.

- 17 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple connexe admettant $2k$ sommets impairs, $k \geq 1$. Prouver qu'il existe k chaînes simples de G dont les arêtes constituent une partition de A . En déduire que si une figure tracée au crayon admet $2k$ sommets impairs, on pourra la reproduire sans passer deux fois sur un même trait et en ne levant le crayon que $k - 1$ fois.
- 18 Soit $G = (X, A)$ un graphe simple et $k \geq 2$ un entier tel que $\forall x \in X, d(x) \geq k$. Prouver que G possède un cycle simple de longueur non inférieure à $k + 1$. Trouver un exemple pour lequel, $\forall x \in X, d(x) = 2$, (respectivement, $\forall x \in X, d(x) = 3$) bien que G n'admette aucun cycle simple de longueur 3 (resp. 4).

CHAPITRE 1 section 4

- 19 Caractériser les graphes simples qui sont à la fois eulériens et hamiltoniens.
- 20 Prouver que si le graphe simple G est hamiltonien, alors son graphe-arête, G^* , l'est également.
- 21 Parmi les graphes simples des cinq polyèdres réguliers (figures 164 à 168), lesquels sont hamiltoniens? Prouver qu'il n'y en a qu'un seul qui soit biparti et un seul qui soit eulérien.
- 22 Si chacune des n personnes invitées à un souper en connaît au moins $\frac{n}{2}$ autres, prouver qu'on peut les asseoir autour d'une table circulaire de façon que chacun connaisse ses deux voisins.
- 23 Soit $X = \{1, 2, \dots, 2n+1\}$, $n \geq 1$. Trouve n cycles hamiltoniens de K_X dont les arêtes forment une partition de $e_2(X)$ en n classes de cardinalité $2n + 1$.
- 24 Prouver que si le graphe simple G est eulérien, alors son graphe-arête G^* l'est également.

CHAPITRE 1 section 5

- 25 Combien de centres le graphe simple suivant possède-t-il?
- a. R_n b. T_n c. fig. 35 d. fig. 26
- 26 Prouver que le sommet x du graphe simple connexe G est un point d'articulation si et seulement s'il existe deux sommets distincts y et z de G tels que toute chaîne, reliant y et z , passe par x .
- 27 Prouver que l'arête a est un isthme du graphe simple G si et seulement si a n'appartient à aucun cycle simple de G .
- 28 Trouver une factorisation linéaire des graphes simples cubiques: $P(6,2)$, $P(5,1)$ et $P(4,1)$ (fig. 9).
- 29 Soit G le graphe simple décrit par la figure 34. Prouvez que G possède:
- deux séparateurs de cardinalité 2;
 - aucun séparateur de cardinalité 3;
 - deux séparateurs non-triviaux de cardinalité 4.
- Existe-t-il un séparateur de cardinalité 5 (respectivement 6)?
- 30 Soit G le graphe simple décrit par la figure 35. Trouver:
- le diamètre de G ;
 - le rayon de G et ses centres;
 - une chaîne simple de longueur $\delta(G)$, qui ne soit pas un géodésique;
 - une chaîne simple de longueur 8;
 - un facteur linéaire.
- 31 Pour quelles valeurs de n et k , l'ensemble $\{\{x_i, y_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$ est-il un séparateur du graphe de Petersen généralisé $P(n,k)$?

CHAPITRE 1 section 6

- 32 Prouver qu'il y a 41 472 façons de placer les 4 cubes de l'énigme "Instant Insanity".
- 33 Colorier les 6 faces de quatre cubes, en utilisant quatre couleurs, et trou-

ver toutes les solutions de ce nouveau problème d'"Instant Insanity".

CHAPITRE 1 section 7

- 34 Trouver, à isomorphisme près, tous les arbres d'ordre sept ou moins. Vérifier directement la formule de Cayley pour $n \leq 5$.
- 35 Trouver tous les arbres semi-eulériens.
- 36 Prouver qu'un arbre ne peut avoir qu'un ou deux centres.
- 37 Soit $a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_2 \geq a_1 \geq 1$ une suite décroissante d'entiers telle que $\sum_{i=1}^n a_i = 2(n-1)$. Prouver qu'il existe un arbre sur $[n]$ tel que $d(i) = a_i, \forall i$. Trouver un arbre "réalisant" les suites graphes suivantes:
- | | |
|----------------------------|----------------------|
| a. $(3,3,2,2,1,1,1,1)$ | b. $(3,2,2,2,1,1,1)$ |
| c. $(5,5,1,1,1,1,1,1,1,1)$ | d. $(2,2,2,1,1,1,1)$ |
| e. $(6,1,1,1,1,1,1)$ | |
- 38 Soit $X = \{1,2,\dots,n\}$. Soit p_n la probabilité que dans un arbre choisi au hasard, parmi les n^{n-2} arbres sur X , le sommet 1 soit pendent. Prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{e}$.
- 39 Soit $G = (X,A)$ un graphe simple connexe, $T = (X,B)$ un arbre partiel de G et $S \subseteq A$ un séparateur de G . Prouver que:
- $A - B$ ne contient aucun séparateur de G ;
 - $A - S$ ne contient les arêtes d'aucun arbre partiel de G .
- 40 Trouver un arbre partiel du graphe de Petersen et le système fondamental de cycles qui lui est associé.
- 41 Soit $G = (X,A)$ un graphe simple connexe. On définit le *graphe-arbre*, $T = (Y,B)$, de G en posant $Y = \{\text{arbres partiels de } G\}$ et, pour (X,A_1) et (X,A_2) des arbres partiels de G , $\{(X,A_1),(X,A_2)\} \in B$ si et seulement si $|A_1 - A_2| = 1 = |A_2 - A_1|$. Prouver que T est toujours connexe. Vérifier (au moins pour $G = K_4, C_4$ et R_4) que T est hamiltonien.

CHAPITRE 2 section 1

- 42 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté connexe. Prouver que:
 $n - 1 \leq m \leq n(n - 1)$, où $n = |X|$ et $m = |U|$.
- 43 Dans le graphe orienté des liens de parenté, décrit par la figure 70, trouver deux sommets représentant:
- des frères ou soeurs;
 - des cousins ou cousines;
 - une personne et son oncle (ou tante);
 - des demi-frères (ou demi-soeurs).
- 44 Soit G le graphe orienté des liens de parenté sur l'ensemble des êtres humains vivants ou morts.
- Pour $x \in X$, que représente $d^+(x)$?
 - Est-il vrai que: $\forall x, d^-(x) = 2$?
 - Décrire les graphes orientés G^2 et \hat{G} .
- 45 Combien y a-t-il, à isomorphisme près, de graphes orientés d'ordre 1, 2 et 3?
- 46 Soit G le graphe orienté du mouvement d'une tour sur un échiquier n par n , où $n > 1$. Prouver que G^2 est le graphe orienté complet $(X, X \times X)$, où X est l'ensemble des n^2 cases de l'échiquier. Soit c et c' deux cases, combien y a-t-il, selon le cas, de chemins de longueur deux, de c à c' ?

CHAPITRE 2 section 2

- 47 Soit $G' = (X, U)$ le graphe orienté associé à un graphe simple connexe $G = (X, A)$. Prouver que G' est un graphe orienté eulérien. En déduire qu'il existe toujours un cycle de G passant exactement deux fois par chacune de ses arêtes. Trouver une telle chaîne pour le graphe simple décrit dans la figure 72.
- 48 Soit $G = (X, A)$, un graphe simple. Combien y a-t-il de graphes orientés asymétriques, c.-à-d. $(x, y) \in U \Rightarrow (y, x) \notin U$, ayant G comme graphe simple associé? Trouver une bijection entre l'ensemble des graphes simples sur $[n]$ et l'ensemble des tournois sur $[n]$. (Un *tournoi* (X, U) étant un graphe orienté tel que $\forall x, y \in X$, on a $x \neq y \Leftrightarrow U \cap \{(x, y), (y, x)\}$ est un singleton).

CHAPITRE 2 section 3

- 49 Soit $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Combien y a-t-il
- de graphes orientés sur $[n]$?
 - de graphes orientés symétriques sur $[n]$?
 - de graphes orientés antisymétriques sur $[n]$?
 - de graphes orientés symétriques et sans boucle sur $[n]$?
 - de graphes asymétriques sur $[n]$, c.-à-d. $(i, j) \in U \Rightarrow (j, i) \notin U$.
- 50 Soit $G = (X, U)$ un graphe orienté. Définissons une relation R sur X par $R = \{(x, y) \mid \exists \text{ chemin de } x \text{ à } y \text{ dans } G\}$. Prouver que:
- R est un préordre sur X , c.-à-d. R est réflexive et transitive;
 - R est un ordre sur $X \Leftrightarrow G$ ne contient aucun circuit de longueur > 1 ;
 - $R = X \times X \Leftrightarrow G$ est fortement connexe.
- 51 Soit $\psi: G \rightarrow H$ un isomorphisme de graphes orientés. Prouver que:
- $\psi: G^{-1} \rightarrow H^{-1}$ l'est également;
 - $\forall x \in G, d^+(x) = d^+(\psi(x))$ et $d^-(x) = d^-(\psi(x))$.
- 52 Dans le graphe orienté, décrit par la figure 204, combien y a-t-il de chemins du sommet, en haut à droite, au sommet, en bas à gauche?
- 53 Soit $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ et $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ deux n -tuples d'entiers naturels. On dit que le graphe orienté $G = (X, U)$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, réalise le couple (s, t) si, $\forall i, 1 \leq i \leq n$, on a $d^+(x_i) = s_i$ et $d^-(x_i) = t_i$.
Trouver, s'il existe, un graphe orienté réalisant les couples suivants:
- $(3, 2, 1, 1)$ et $(2, 0, 2, 3)$;
 - $(1, 1, 1)$ et $(2, 0, 0)$;
 - $(2, 2, 3, 1)$ et $(0, 2, 3, 3)$;
 - $(5, 4, 0, 1, 1)$ et $(3, 3, 3, 1, 1)$.
- 54 Soit $G = (X, U)$ un *tournai*, c.-à-d. un graphe orienté tel que $\forall x, \forall y$, on a $(x \neq y) \Leftrightarrow U \cap \{(x, y), (y, x)\}$ est un singleton. Prouver que:
- $d^+(x) = 0$, pour au plus un x ;
 - $d^-(x) = 0$, pour au plus un x ;
 - $\forall x, d^+(x) + d^-(x) = |X| - 1$;
 - $\sum_{x \in X} (d^+(x))^2 = \sum_{x \in X} (d^-(x))^2$.

CHAPITRE 2 section 4

55 Soit $M = M(G)$ la matrice d'adjacence du graphe simple G . Décrire, en fonction de k , la matrice M^k , si G est:

- a. K_3 b. $K_{3,3}$ c. K_n d. $K_{p,q}$

56 Soit M la matrice d'adjacence du graphe orienté $G = (X, \Gamma)$, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Posons $S = M \cdot M^t$ et $T = M^t \cdot M$.

Prouver que:

- a. $\forall i, \forall j, s_{ij} = |\Gamma(x_i) \cap \Gamma(x_j)|$;
 b. $\forall i, \forall j, t_{ij} = |\Gamma^{-1}(x_i) \cap \Gamma^{-1}(x_j)|$;
 c. $\forall i, s_{ii} = d^+(x_i), t_{ii} = d^-(x_i)$;
 d. $\text{tr } S = |U| = \text{tr } T$.

57 Soit $G_1 = (X, U_1)$ et $G_2 = (X, U_2)$ deux graphes orientés, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Soit M_1 et M_2 les matrices d'adjacence de G_1 et G_2 respectivement.

Prouver que:

- a. $M(G_1 \cap G_2)_{ij} = (M_1)_{ij} \cdot (M_2)_{ij}$, où $G_1 \cap G_2 = (X, U_1 \cap U_2)$;
 b. $M(G_1 \cup G_2)_{ij} = \max\{(M_1)_{ij}, (M_2)_{ij}\}$, où $G_1 \cup G_2 = (X, U_1 \cup U_2)$;
 c. $M(G_1 \Delta G_2) = M(G_1 \cup G_2) - M(G_1 \cap G_2)$, où $G_1 \Delta G_2 = (X, U_1 \Delta U_2)$.

58 Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe orienté sans circuit $G = (X, U)$, où $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Prouver que l'entrée ij de la matrice $I + M + M^2 + \dots + M^{n-1}$ est le nombre de chemins de x_i à x_j dans G .

CHAPITRE 2 section 5

59 Trouver la matrice des distances du graphe orienté décrit par la figure 95.

60 A l'aide de la matrice d'adjacence, trouver la matrice des distances des graphes orientés décrits par les figures 83 et 84.

61 Dans le graphe orienté, décrit par la figure 84, combien y a-t-il de circuits de longueur 5?

CHAPITRE 2 section 6

62 Trouver $\alpha(G)$ et $\beta(G)$ pour les deux graphes simples:

- le dodécaèdre (fig. 32);
- le graphe de Herschel (fig. 33).

*63 Aux échecs féériques, le *vizir* est une pièce se déplaçant, au choix, comme une dame ou un cavalier. Soit $G = (X, A)$ le graphe simple du mouvement d'un vizir sur un échiquier 8 par 8. Trouver:

- $|A|$
- $\alpha(G)$
- $\beta(G)$.

64 Trouver les valeurs de $\alpha(G)$, $\beta(G)$, $\gamma(G)$ et $q(G)$ pour les graphes simples donnés par les figures 22, 23 et 134.

65 Un graphe simple $G = (X, A)$ est appelé *critique* si $\forall x \in X, \gamma(G - x) < \gamma(G)$. Prouver que:

- K_n est critique, $\forall n > 1$;
- C_n est critique $\Leftrightarrow n$ est impair et $n > 1$.

66 Soit G un graphe simple d'ordre n . Prouver que:

- $2\sqrt{n} \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1$;
- $n \leq \gamma(G) \cdot \gamma(\overline{G}) \leq \frac{1}{4}(n + 1)^2$.

67 Trouver tous les graphes simples G tels que $q(G) = 2$.

68 Trouver la valeur de $q(G)$ pour les quatre graphes de Petersen généralisés donnés par la figure 9. Combien de factorisations linéaires chacun des trois premiers admet-il?

69 Trouver, si possible, un noyau dans le graphe orienté suivant:

- fig. 83
- fig. 84
- fig. 86
- fig. 90
- fig. 91

CHAPITRE 3 section 1

70 Trouver la matrice des coûts minimums et la matrice des distances du graphe valué $G = (X, U, \phi)$ où:

$X = \{1, 2, \dots, 11, 12\}$, $U = \{(x, y) \mid x \text{ divise } y\}$, et

$\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\phi(x, y) = \frac{y}{x}$.

71 Une chaîne de Markov sur un graphe orienté $G = (X, U)$, où

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, est une matrice $P = (p_{ij})$ telle que:

$(x_i, x_j) \notin U \Rightarrow p_{ij} = 0$, $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$, $\forall i$, et $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\forall i, \forall j$.

Prouver que, $\forall k \geq 1$, l'entrée ij de la matrice P^k est la probabilité, sachant qu'on est parti du sommet x_i et qu'on a parcouru k flèches, d'aboutir en x_j .

CHAPITRE 3 section 2

72 A l'aide de la méthode de Maria Hasse, trouver la matrice des distances des graphes orientés suivants:

a. fig. 83

b. fig. 84

c. fig. 90

d. fig. 91

CHAPITRE 3 section 3

73 Trouver un chemin de coût minimum du sommet s au sommet p dans le graphe valué suivant:

a. fig. 119

b. fig. 123

c. fig. 130

d. fig. 132

74 Trouver la matrice des coûts minimums pour le graphe valué symétrique décrit par la figure 115.

CHAPITRE 3 section 4

75 Trouver un arbre partiel de valeur maximum dans le graphe simple suivant:

a. fig. 115

b. fig. 116

c. fig. 117

CHAPITRE 3 section 5

- 76 Trouver un sp-séparateur de valeur minimum dans le réseau suivant:
- a. fig. 119 b. fig. 123 c. fig. 129 d. fig. 130
- 77 Soit $G = (X, U, \phi)$ un réseau de source s et de puits p . Prouver que:
- $G' = (X, U^{-1}, \phi')$, où $\phi'(y, x) = \phi(x, y)$, $\forall (x, y) \in U$, est un réseau de source p et de puits s ;
 - $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est un flot pour G si et seulement si $f' : U^{-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $f'(y, x) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in U$, est un flot pour G' ;
 - f est maximum si et seulement si f' l'est;
 - $S \subseteq U$ est un sp-séparateur de G si et seulement si $S^{-1} \subseteq U^{-1}$ est un ps-séparateur de G' .

CHAPITRE 3 section 6

- 78 Lesquelles des familles suivantes de parties de $E = \{a, b, c, d, e\}$ admettent un système de représentants distincts?
- $\{\{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}\}$;
 - $\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, d, e\}\}$;
 - $\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{d, e\}, \{d, e\}\}$;
 - $\{\{a, c, d\}, \{a, d, e\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}\}$.
- 79 Après sa mort, le maharadjah Dekinépadou laisse en héritage à ses n fils son harem composé de m femmes. Par mesure d'économie, chacun des n fils ne désire garder que 3 femmes avec lesquelles il est compatible. Prouver qu'une telle répartition des femmes n'est possible que si et seulement si, pour tout ensemble de k fils, $1 \leq k \leq n$, pas moins de $3k$ femmes sont compatibles avec au moins un de ces k fils.
- 80 Trouver un sous-ensemble S de $\{1, 2, 3, \dots, 20\}$ qui soit simultanément un système de représentants pour les deux partitions P_1 et P_2 suivantes:
- $$P_1 = \{\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}, \{4, 6, 9, 10, 14, 15\}, \{8, 12, 18, 20\}, \{16\}\},$$
- $$P_2 = \{\{1, 5, 9, 13, 17\}, \{2, 6, 10, 14, 18\}, \{3, 7, 11, 15, 19\}, \{4, 8, 12, 16, 20\}\}.$$
- Plus généralement, si P_1 et P_2 sont deux partitions de $[m]$ admettant chacune k classes, trouver une bonne condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un système commun de k représentants pour P_1 et P_2 .

- 81 Il y a nm couples à une danse. Les hommes font partie de n groupes de m membres chacun et les femmes à n associations de m membres chacune. Prouver qu'on peut choisir n couples de sorte que tous les groupes et toutes les associations soient représentés.
- 82 A l'aide du théorème de dualité de Ford-Fulkerson, prouver les résultats suivants:
- le théorème de Hall;
 - une famille, $S = (S_i)_{i \in I}$, de parties non-vides d'un ensemble E , admet un système de représentants distincts (c.-à-d. une fonction injective, $\phi : I \rightarrow E$, telle que $\forall i, \phi(i) \in S_i$) si et seulement si $\forall J \subseteq I$,

$$|J| \leq \left| \bigcup_{j \in J} S_j \right|;$$
 - deux familles, $T = (T_i)_{i \in I}$ et $S = (S_i)_{i \in I}$, de parties non-vides d'un ensemble E , admettent un système commun de représentants distincts si et seulement si $\forall J_1, J_2 \subseteq I$, on a

$$\left| \left(\bigcup_{i \in J_1} T_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in J_2} S_i \right) \right| \geq |J_1| + |J_2| - |I|.$$

CHAPITRE 4 section 1

- 83 Le graphe simple suivant est-il planaire?
- | | | | |
|------------|------------|----------|----------|
| a. fig. 12 | b. fig. 15 | c. C_5 | d. R_n |
| e. T_4 | f. fig. 38 | g. D_3 | |
- 84 Trouver un graphe planaire dont le graphe-arête ne l'est pas.
- *85 Prouver que tout graphe simple peut être plongé dans l'espace euclidien de dimension 3, \mathbb{R}^3 , de manière que les arêtes soient des segments de droites.
- *86 Soit T un tore à deux trous. Montrer que K_8 peut être plongé dans cette surface.

CHAPITRE 4 section 2

172 EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

87 Vérifier la formule d'Euler pour un échiquier n par n . En d'autres mots, vérifier la formule d'Euler pour la figure plane dont les faces bornées sont les n^2 cases d'un échiquier n par n .

CHAPITRE 4 section 3

88 Trouver le nombre cyclomatique des graphes simples associés aux cinq polyèdres réguliers.

89 Trouver l'indice chromatique des graphes simples associés aux cinq polyèdres réguliers.

CHAPITRE 4 section 4

90 Soit C une carte obtenue en traçant n cercles dans le plan et une corde dans chacun de ces cercles, de manière que deux quelconques de ces cordes soient toujours, ou bien disjointes, ou bien avec une extrémité commune. Prouver que C est 3-coloriable.

91 Soit P un polyèdre convexe n'ayant comme faces que des pentagones et des hexagones. Prouver que P contient au moins douze pentagones. Si les sommets de P sont tous de degré égal à trois, prouver qu'il y a alors exactement douze pentagones.

CHAPITRE 5 section 1

92 Soit J_i , $1 \leq i \leq 5$, le jeu sur le graphe orienté décrit par la figure 91, en commençant au sommet x_i . Qui, entre A et B, a une stratégie gagnante?

93 Soit $G = (X, U) = (X, \Gamma)$ un graphe orienté. Prouver que:

- si G n'admet aucun circuit de longueur impaire, alors il admet un noyau;
- si G n'admet aucun circuit, alors il admet un unique noyau.

94 Soit $T = (X, A)$ un arbre et $x_0 \in X$. Prouver qu'il existe une unique façon

"d'orienter les arêtes de T en fuyant le sommet x_0 ". C'est-à-dire, un seul graphe orienté asymétrique, $G = (X, U)$, ayant T comme graphe simple associé et tel que $d^-(x_0) = 0$, $d^+(x_0) = d(x)$ et, $\forall x \in X$, $x \neq x_0$, $d^+(x) = d(x) - 1$ et $d^-(x) = 1$.

Si les joueurs A et B jouent sur G , en commençant en x_0 , prouver que:

- $(\forall x \in X, (x \text{ pendant} \Rightarrow d(x_0, x) \text{ est pair})) \Leftrightarrow$ (toutes les parties sont gagnantes pour B);
- $(\forall x \in X, x \neq x_0, (x \text{ pendant} \Rightarrow d(x_0, x) \text{ est impair})) \Leftrightarrow$ (toutes les parties sont gagnantes pour A).
- Trouver un exemple où A (respectivement B) a une stratégie gagnante sans que toutes les parties ne soient gagnées par lui.
- Décrire l'unique fonction de Grundy sur G .

CHAPITRE 5 section 2

- 95 Le graphe orienté suivant admet-il une fonction de Grundy?
 a. fig. 70 b. fig. 71 c. fig. 93 d. fig. 94
- 96 Analyser le jeu suivant: il y a deux tas de n et m allumettes; à tour de rôle, les joueurs A et B enlèvent une allumette dans un des tas ou une allumette dans chacun des deux tas en même temps; le joueur A commence et le gagnant est celui qui prend la dernière allumette. Ecrire la fonction de Grundy de ce jeu. (Voir l'exercice 148 c.)
- 97 Analyser le jeu suivant: il y a trois tas: T_1, T_2, T_3 d'allumettes ayant respectivement n, k et l allumettes. A tour de rôle les joueurs choisissent un tas, disons T_i , et y enlèvent $1, 2, \dots$ ou 2^i allumettes. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette. Analyser le jeu où il est également permis d'enlever simultanément une allumette dans chacun des 3 tas.

CHAPITRE 5 section 3

- 98 Au jeu de Fan Tan où il y a cinq tas de 1000 allumettes chacun, trouver la valeur de la fonction de Grundy pour les sommets représentés par les 5-tuples suivants:

174 EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

- a. (1000,100,10,100,1000)
- b. (37,193,308,14,6)
- c. (1,4,16,64,256)
- d. (731,137,0,101,79).

99 Prouver que:

- a. $B_k + B_\ell \simeq B_{k+\ell}$, où B_n désigne le cube de dimension n (fig. 11) et le + de gauche est la somme cartésienne;
- b. $P(n,1) \simeq C_n + K_2$.

100 Prouver que $\forall n, \forall m \geq 3$, la somme cartésienne $C_n + C_m$ est un graphe simple pouvant être plongé dans la surface qu'est le tore (fig. 157). Vérifier que $\forall n, \forall m$, l'expression $|\{\text{sommets}\}| - |\{\text{arêtes}\}| + |\{\text{faces}\}|$ est toujours nulle. Cette valeur commune est appelée la *caractéristique d'Euler du tore*.

D

BIBLIOGRAPHIE

livres

- [1] C. Berge, GRAPHERS ET HYPERGRAPHERS, Dunod 1973.
- [2] J.A. Bondy et U.S.R. Murty, GRAPH THEORY WITH APPLICATIONS, North Holland, New York 1979.
- [3] G. Chartrand et S.F. Kapoor, THE MANY FACETS OF GRAPH THEORY, Lecture Notes in Mathematics no. 110, Springer-Verlag 1969.
- [4] N. Christofides, GRAPH THEORY; AN ALGORITHMIC APPROACH, Academic Press 1975.
- [5] L. Comtet, ANALYSE COMBINATOIRE, TOME PREMIER, Presses Universitaires de France, Collection SUP, 1970.
- [6] F. Harary, GRAPH THEORY, Addison-Wesley 1972.
- [7] F. Harary et E. Palmer, GRAPHICAL ENUMERATION, Academic Press 1973.
- [8] C. Kosniowski, A FIRST COURSE IN ALGEBRAIC TOPOLOGY, Cambridge University Press 1980.
- [9] M. Kraitchik, RECREATIONNAL MATHEMATICS, Dover 1942.
- [10] W. Lietzmann, VISUAL TOPOLOGY, American Elsevier 1969.

- [11] J.W. Moon, COUNTING LABELLED TREES, Canadian Mathematical Monographs No. 1.
- [12] O. Ore, GRAPHS AND THEIR USES, Randon House 1963.
- [13] A.P. Street et W.D. Wallis, COMBINATORIAL THEORY: AN INTRODUCTION, The Charles Babbage Research Centre, Winnipeg 1977.
- [14] R.J. Wilson, INTRODUCTION TO GRAPH THEORY, Longman 1972.

articles

- [15] K. Appel et W. Haken, Math. Magazine, Vol.53, #3, Mai 1980.
- [16] Flye St-Marie, NOTE SUR UN PROBLEME RELATIF A LA MARCHE DU CAVALIER SUR L'ECHIQUIER, Bull. soc. mathém.t.v., 1876-77, pp. 144-150.
- [17] S.L. Hakimi, ON REALIZABILITY OF A SET OF INTEGERS AS DEGREES OF THE VERTICES OF A LINEAR GRAPH I, J. of the SIAM, 10, 1962, pp. 496-506.
- [18] E.J. Hoffman, J.C. Loessi et R.C. Moore, CONSTRUCTIONS FOR THE SOLUTION OF THE m QUEENS PROBLEM, Math. Magazine #42, 1969, pp. 66-72.
- [19] A. Joyal, UNE THEORIE COMBINATOIRE DES SERIES FORMELLES, Advances in Mathematics, 42 (1981), pp. 1-82.
- [20] A. Kotzig et J. Labelle, SUR LES GRAPHS DE MOUVEMENTS DE CAVALIERS GENERALISES, (à paraître).
- [21] A. Kotzig et J. Labelle, ON STRONGLY HAMILTONIAN GRAPHS, Utilitas Mathematica, Vol. 14 (1978), pp. 99-116
- [22] A. Kotzig et J. Labelle, QUELQUES PROBLEMES OUVERTS CONCERNANT LES GRAPHS FORTEMENT HAMILTONIENS, Ann. Sc. Math. Québec, 1979, Vol. III, No. 1, pp. 95-106.
- [23] J. Labelle, APPLICATIONS DIVERSES DE LA THEORIE COMBINATOIRE DES ESPECES DE STRUCTURES, Ann. Sc. Math. Québec, 1983, Vol. 7, No 1, pp. 59-94.

autres

- [24] R. Turcotte, LES GRAPHS DE PETERSEN GENERALISES, Mémoire de maîtrise, UQAM 1978.
- [25] Prof. Cosinus; article dans la revue officielle de la Féd. Qué. des Echecs, Le Petit Roque, 1980.
- [26] Notes (prises par G. Tremblay) du cours, théorie des graphes, donné par P. Leroux, UQAM 1981.

E

INDEX

- Absorbant (ensemble -) 58
- Absorption (nombre d' -) 58
- Adjacence (matrice d' -) 49
- Adjacents (sommets -) 1
- Algorithme de Dijkstra 70
 - Fleury 19
 - Ford-Fulkerson 79
 - Kruskal 73
 - Moore 55
 - Sollin-Calestagne 74
- Alternée (chaîne -) 82
- Antisymétrique (relation -) 116
- Appartenir à 115
- Arborescence 36
- Arbre 33
- Arbre partiel 35
- Arc 43
- Arête 1
- Articulation (point d' -) 26
- Auto-complémentaire (graphe -) 11
- Bernoulli (famille -) 33
- Bijective (fonction -) 117
- Biparti-complet (graphe -) 3
- Biparti (graphe simple -) 12
- Bipartition 11
- Blanche Descartes (lemme de -) 28
- Boucle 1, 43
- Boucles (graphes avec -) 13
- Boucles (multigraphe avec -) 13
- Bras 16
- Brouwer (théorème de -) 24
- Calibre 161
- Capacité d'une flèche 76
- Capacité d'un flot 77
- Capacité d'un séparateur 77
- Caractéristique d'Euler 174
- Cardinalité 1
- Carré 41
- Carré magique 20
- Carte de géographie 98
 - planaire 98
 - régulière 99
 - routière 2
- Cartésienne (somme -) 109
- Cartésien (produit -) 116
- Cavalier généralisé 23
- Cavalier (marche du -) 20
- Cayley (formule de -) 36
- Cayley (théorème de -) 36
- Centre 25
- Chaîne 3, 14
- Chaîne alternée 82
 - dans un graphe orienté 47
 - dans un graphe simple 14
 - élémentaire 15
 - eulérienne 15
 - fermée 14
 - hamiltonienne 20
 - (longueur d'une -) 14
 - simple 15
- Chemin 46
- Chemin élémentaire 46
 - minimum 67
 - simple 46
- Chromatique (indice -) 62
 - (nombre -) 61
- Circuit 46
- Classe d'équivalence 116
- Clique 160
- Coccyx d'un vertébré 136
- Colonne vertébrale 37
- Complémentaire d'un graphe orienté 48
 - d'un graphe simple 10
- Complet (flot -) 77
 - (graphe orienté -) 46

- (graphe simple -) 2
- Composante connexe 15
 - (première - d'un couple 116
 - (seconde - d'un couple 116
- Composition de fonctions 117
- Conjonction 115
- Connexe (composante -) 15
 - (graphe orienté -) 47
 - (graphe orienté fortement -) 47
 - (graphe simple -) 15
- Convexe (polyèdre -) 96
- Cou d'un vertébré 136
- Coupant (ensembles se -) 115
- Couplage 82
- Couplage maximal 82
 - parfait 82
- Couple ordonné 116
- Courbe de Jordan 87
 - fermée 87
 - planaire 87
 - simple 87
- Coût d'un chemin 67
 - d'un sous-graphe 73
 - (fonction de -) 67
- Critique (graphe -) 168
- Cube 97
- Cube de dimension n 5
- Cubique (graphe simple -) 5
- Cycle 3, 15
- Cycle élémentaire 15
 - eulérien 17
 - hamiltonien 20
 - simple 15
- Cyclomatique (nombre -) 38
- Dégénéré (vertébré -) 40
- Degré 5
- Demi-degré 47
 - intérieur 47
 - intérieur 47
- Descartes (lemme de Blanche -) 28
- Diamètre 25
- Différence symétrique 41
- Digitale (somme -) 109
- Dijkstra (algorithme de -) 70
- Dirac (théorème de -) 21
- Discret (graphe simple -) 2
- Disjoints (ensembles -) 115
- Disjonction 116
- Distance 117
- Distances (matrice des -) 53
- Dodécaèdre 22, 97
- Double Disaster 32
- Dual d'un polyèdre convexe 97
- Echecs (graphe orienté du jeu d'-) 104
- Élément 115
- Élément (le plus grand -) 116
 - maximal 116
 - maximum 116
- Élémentaire (chaîne -) 15
 - (chemin -) 46
- Enigme 29
- Enigme des maris jaloux 30
 - des missionnaires 32
- "Double Disaster" 32
 - du fermier 29
- "Instant Insanity" 30
- Ensemble 115
- Ensemble absorbant 58
 - des arêtes 1
 - des parties 115
 - des sommets 1
 - extérieurement stable 58
 - indépendant 56
 - intérieurement stable 56
 - quotient 116
 - vide 115
- Ensembles disjoints 11
- Équivalence 116
- Équivalence (classe d'-) 116
 - (relation d'-) 116
- Etoile 3
- Euler (caractéristique d'-) 174
 - (formule d'-) 93
 - (théorème d'-) 18
- Eulérien (cycle -) 17
 - (graphe -) 17
- Eulérienne (chaîne -) 17
- Excentricité 25
- Extérieurement stable 58
- Extérieur (sommets -) 4
- Extrémité finale d'un chemin 46
 - d'une chaîne 14
 - d'une flèche 43
 - initiale d'un chemin 46
 - d'une chaîne 14
 - d'une flèche 43
- Extrémités d'un chemin 46
 - d'une arête 1
 - d'une chaîne 15
 - d'une courbe planaire 87
 - d'une flèche 43
- Face d'une figure planaire 93
 - infinie 93
- Facteur linéaire 26
- Factorisation linéaire 27
 - linéaire hamiltonienne 27
- Famille Bernoulli 33
- Fan Tan (jeu de -) 110
- Fermée (chaîne -) 14
 - (courbe -) 87
- Fermeture transitive 48
- Figure planaire 87
- Flèche 43
- Flèche non-saturée 77
- Flèche saturée 77
- Fleury (algorithme de -) 19
- Flot 77
- Flot complet 77
- Fonction 117
- Fonction bijective 117
 - de coût 67
 - de Grundy 106
 - d'incidence 13
 - idempotente 40
 - identité 117
 - injective 117
 - multivoque 44
 - surjective 117

- Ford-Fulkerson (algorithme de -) 79
 (théorème de -) 77
 Forêt 33
 Formule de Cayley 36
 de Heawood 152
 de Scoins 40
 d'Euler 93
 Fortement connexe 47
 Fortement hamiltonien 27
 Gagnant 103
 Géodésique 24
 Géographie (carte de -) 98
 Graphe-arête 12
 Graphe avec boucles 13
 complémentaire d'un graphe
 orienté 48
 d'un graphe
 simple 10
 complet 2
 connexe 15
 critique 168
 cubique 5
 de Herschel 23
 de Petersen 4
 de Petersen généralisé 4
 discret 2
 d'un tournoi 2
 eulérien 17
 fortement hamiltonien 27
 hamiltonien 20
 inverse d'un graphe
 orienté 48
 pair 11
 partiel 10, 46
 planaire 88
 purement hamiltonien 27
 orienté 43
 orienté complet 46
 connexe 47
 du jeu d'échecs 104
 fortement connexe 47
 réflexif 43
 symétrique 43
 transitif 43
 représentatif 12
 semi-eulérien 17
 semi-hamiltonien 20
 simple 1
 simple valué 73
 spatial 92
 (U-) 27
 valué 67
 Graphique (suite -) 9
 Grundy (fonction de -) 106
 (noyau de -) 107
 Hall (théorème de -) 82
 Hamiltonien (cycle -) 20
 (fortement -) 27
 (graphe -) 20
 (purement -) 27
 Hamiltonienne (chaîne -) 20
 (factorisation
 linéaire -) 27
 Hasse (Maria -) 68
 Heawood (formule de -) 152
 Herschel (graphe de -) 23
 Homomorphisme de graphes simples 7
 Hypergraphe 14
 Icosaèdre 97
 Idempotente (fonction -) 40
 Identité (fonction -) 117
 Image 117
 Image inverse 117
 Impair (sommet -) 6
 Implication 116
 Incidence (fonction d'-) 13
 (matrice d'-) 159
 Incident (sommet -) 1
 Indépendant (ensemble -) 56
 Indice chromatique 62
 Inégalité du triangle 117
 Infinie (face -) 93
 Injective (fonction -) 117
 Instant Insanity 30
 Intérieur (sommet -) 4
 Intérieurement stable 56
 Intersection 115
 Inverse d'un graphe orienté 48
 Inverse (image -) 117
 Isolé (sommet -) 5
 Isomorphes (graphes simples -) 7
 Isomorphisme de graphes simples 7
 Isthme 26
 Jeu d'échecs (graphe orienté
 du -) 104
 de Fan Tan 110
 de Marienbad 110
 de Nim 110
 Joint 1
 Joint de graphes simples 10
 Jordan (courbe de -) 87
 (théorème de -) 88
 Journaliste (paradoxe du -) 13.
 Königsberg (ponts de -) 18
 Kruskal (algorithme de -) 73
 Kuratowski 91
 Lemme de Blanche Descartes 28
 de Sperner 24
 des coups de pied 47
 des poignées de mains 6
 Linéaire (facteur -) 26
 (factorisation -) 27
 Longueur d'un chemin 46
 d'une chaîne 14
 Magique (carré -) 20
 Marche du cavalier 20
 Mariage ω 28
 Mariages (théorème des -) 83
 Marienbad (jeu de -) 110
 Matrice d'adjacence 49
 de coût minimum 68
 des distances 53
 des valeurs 68
 d'incidence 159
 nilpotente 52
 Maximal (élément -) 116
 Maximum (élément -) 116
 Méthode de Maria Hasse 68
 Moore (algorithme de -) 55
 Mouvement du cavalier (graphe
 du -) 3
 Multigraphe 13
 Multigraphe avec boucles 13
 orienté 51

- Multivoque (fonction -) 44
 Nilpotente (matrice -) 52
 Nim (jeu de -) 110
 Nombre chromatique 61
 cyclomatique 38
 d'absorption 58
 de stabilité externe 58
 interne 57
 Non-dégénéré (vertébré -) 40
 Non-saturée (flèche -) 77
 Non-trivial (séparateur -) 26
 Noyau 59
 Noyau de Grundy 107
 Octaèdre 97
 Opérations semi-booléennes 54
 Ordonné (couple -) 116
 Ordre d'un graphe orienté 46
 d'un graphe simple 1
 (relation d'-) 116
 Orienté (graphe -) 43
 Pair (graphe simple -) 11
 (sommet -) 6
 Paire 1
 Paradoxe du journaliste 138
 Parfait (couplage -) 82
 Partie 103, 115
 Partie décisive 103
 nulle 103
 Partiel (arbre -) 35
 (graphe -) 10
 Passer par 1
 Pendant (sommet -) 34
 Perdant 103
 Petersen (graphe de -) 4
 généralisé (graphe de -) 4
 Planaire (carte -) 98
 (courbe -) 87
 (figure -) 87
 (graphe -) 88
 Planarité 87
 Platon (solides de -) 97
 Plongement dans le plan 88
 dans une surface 91
 Point d'articulation 26
 Pôle nord 91
 Polyèdre 96
 Polyèdre convexe 96
 régulier 97
 Pont 26
 Ponts de Königsberg 18
 Position aux échecs 104
 réalisable aux échecs 112
 Produit cartésien 116
 Projection stéréographique 91
 Puits 76
 Purement hamiltonien 27
 Quantificateur existentiel 116
 universel 116
 Quotient (ensemble -) 116
 Racine 36
 Rayon 25
 Réalisable (sommet -) 112
 Réflexif (graphe orienté -) 43
 Réflexive (relation -) 116
 Régulier (graphe simple -) 5
 (polyèdre -) 97
 Régulière (carte -) 99
 Relation 116
 Relation antisymétrique 116
 d'équivalence 116
 d'ordre 116
 réflexive 116
 symétrique 116
 transitive 116
 Représentation d'un graphe
 orienté 43
 d'un graphe simple 2
 Représentatif (graphe -) 12
 Représentants (système de -) 117
 Réseau 76
 Réunion d'ensembles 115
 de graphes simples 10
 Rives d'un séparateur 26
 Roue 4
 Saturé (sommet -) 82
 Saturée (flèche -) 77
 Scoins (formule de -) 40
 Semi-booléennes (opérations -) 54
 Semi-eulérien (graphe simple -) 17
 Séparateur 26
 Séparateur (capacité d'un -) 77
 Séparateur non-trivial 26
 (sp -) 77
 Simple (chaîne -) 15
 (chemin -) 46
 (courbe -) 87
 (graphe -) 1
 Singleton 1
 Solides de Platon 97
 Sollin-Calestagne (algorithme
 de -) 74
 Somme cartésienne 109
 digitale 109
 Sommet 1
 Sommet pendant 34
 impair 6
 pair 6
 saturé 82
 Source 76
 Sous-ensemble 115
 Sous-ensemble strict 115
 Sous-graphe 9
 Sous-graphe d'un graphe orienté 46
 Spatial (graphe -) 92
 Sperner (lemme de -) 24
 Sphère 91
 sp-séparateur 77
 Squelette 38
 Stabilité externe (nombre de -) 58
 interne (nombre de -) 57
 Stable (ensemble extérieure-
 ment -) 58
 (ensemble intérieure-
 ment -) 56
 Stéréographique (projection -) 91
 Strict (sous-ensemble -) 115
 Subdivision d'un graphe simple 90
 Suite graphique 9
 Surjective (fonction -) 117
 Symétrique (différence -) 41
 (graphe orienté -) 43
 (relation -) 116

- Système de représentants 117
 - fondamental de cycles 39
 - fondamental de séparateurs 41
- Tête d'un vertébré 136
- Tétraèdre 97
- Théorème de Brouwer 24
 - de Cayley 36
 - d'Euler 18
 - de Dirac 21
 - de Ford-Fulkerson 77
 - de Hall 82
 - de Jordan 88
 - de Tutte 132
 - des cinq couleurs 98
 - des mariages 83
- Tore 92
- Tournoi 166
- Tournoi (graphe d'un -) 2
- Trait 103
- Transitif (graphe orienté -) 43
- Transitive (fermeture -) 48
 - (relation -) 116
- Triangle 52
- Triangle (inégalité du -) 117
- Trivial (séparateur -) 26
- Tutte (théorème de -) 132
- U-graphe 27
- Valeur d'un flot 77
- Valeur d'un séparateur 77
- Valué (graphe -) 67
 - (graphe simple -) 73
- Vertébré 36
- Vertébré dégénéré 40
 - non-dégénéré 40
- Vide (ensemble -) 115
- Vizir 168



Ce livre est imprimé sur
du papier contenant plus
de 50% de papier recyclé
dont 5% de fibres recyclées.



Achévé Imprimerie
d'imprimerie Gagné Liée
au Canada Louiseville