

LES COMPACTS EXTREMEMENT DISCONTINUS SONT FINIS!

*Exposé fait au Séminaire de Clermont-Ferrand
Janvier 1994*

1/ Introduction.

Un espace topologique est dit *compact* ssi il est séparé et si chacun de ses recouvrements ouverts contient un sous-recouvrement fini. Il est dit *extrêmement discontinu* lorsque l'adhérence de tout ouvert est ouvert i.e. l'intérieur de tout fermé est fermé. Les espaces finis discrets sont des compacts extrêmement discontinus. Peut-on construire dans la théorie ZF un compact extrêmement discontinu infini?

Parmi les compacts extrêmement discontinus infinis du "répertoire" bon nombre d'entre eux peuvent être construits avec l'axiome de l'Idéal Premier Booléen seulement:

BPI: *Toute algèbre de Boole non nulle admet un idéal premier.*

Par exemple on peut construire avec BPI les compacts extrêmement discontinus infinis suivants:

- le compactifié de Stone-Cech d'un espace topologique discret infini

- le spectre d'une algèbre de Boole complète infinie

mais l'axiome BPI n'est pas conséquence de la théorie ZF! (cf.[Jech], chapitre V)

On peut aussi obtenir des compacts extrêmement discontinus infinis même si on ne dispose pas de l'axiome BPI. En effet, en notant ω le premier ordinal infini l'axiome

$\mathcal{P}(\omega)$ est bien ordonnable

montre que toute algèbre de Boole qui s'injecte dans $\mathcal{P}(\omega)$ est bien ordonnable donc tout idéal propre de cette algèbre est contenu dans un idéal premier; on peut ainsi construire avec cet axiome les compacts extrêmement discontinus infinis suivants:

- le compactifié de Stone-Cech de l'espace discret ω

- le spectre premier de l'algèbre de Boole des ouverts réguliers de $\mathbb{R}$

mais il existe des modèles de ZF dans lesquels $\mathcal{P}(\omega)$ n'est pas bien ordonnable! (cf.[Jech])

Une autre voie pour obtenir des compacts extrêmement discontinus infinis consiste à recourir aux ensembles infinis *amorphes*.

DEFINITION 1 On dit qu'un ensemble X est *amorphe* lorsque toute partie de X est finie ou cofinie.

Il existe des modèles de ZF dans lesquels certains ensembles infinis sont amorphes (cf. [Jech]). Dans un tel modèle, si A est un ensemble infini amorphe on voit facilement que l'ensemble $\mathcal{U}$ des parties cofinies de A est l'unique ultrafiltre non trivial sur A et que tout filtre non trivial sur A est contenu dans l'ultrafiltre $\mathcal{U}$. L'ensemble des ultrafiltres sur A muni de la topologie de Stone-Cech réalise donc le

compactifié de Stone-Cech βA de l'espace discret A . L'espace βA est un compact extrêmement discontinu infini, amorphe de surcroît. Mais il existe des modèles de ZF sans ensembles amorphes infinis: les modèles avec axiome du choix! Notons aussi que l'espace βA réalise en même temps le compactifié d'Alexandrov de l'espace discret A .

Les exemples qui précèdent laissent penser qu'on ne peut pas construire de compact extrêmement discontinu dans ZF. On va voir qu'il en est bien ainsi et donner des modèles de ZF dans lesquels tout compact extrêmement discontinu est fini. En d'autres mots l'axiome

Il existe au moins un compact extrêmement discontinu infini.

n'est pas conséquence de ZF.

Par ailleurs, on s'intéresse aux trois énoncés suivants:

DC: Pour toute relation binaire R sur un ensemble non vide E vérifiant $\forall x \in E \exists y \in E xRy$ il existe une suite $(x_n)_{n \in \omega}$ de E telle que $\forall n \in \omega x_n R x_{n+1}$.

BC: Tout espace topologique compact est un espace de Baire.

BCED: Tout compact extrêmement discontinu est de Baire.

Il est bien connu (cf. [Bki] TG IX.55) que l'énoncé DC implique l'énoncé BC. La question de savoir si BC implique DC est restée ouverte dans l'article de Goldblatt ([G]) et j'ignore toujours la réponse. On va cependant montrer que l'axiome BCED n'implique pas BC. Notons que dans la théorie (ZF + BPI) les trois énoncés DC, BC et BCED sont équivalents (cf. [G], [Mo1]).

2/ Une CNS pour qu'un espace 0-dimensionnel soit extrêmement discontinu.

Les preuves des résultats de cette section 2 sont bien connues et sont valides dans ZF. On les donne pour mémoire.

DEFINITION 2 On dit qu'un espace topologique X est 0-dimensionnel lorsque les ouverts-fermés de X forment une base d'ouverts de X .

LEMME 1 Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}$ l'algèbre de ses ouverts-fermés. Soit $(O_i)_{i \in I}$

◦
—

une famille d'ouverts-fermés de X et O l'ouvert $\bigcup_{i \in I} O_i$.

i) Si O est fermé alors O est borne supérieure de $(O_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{O}$.

ii) Si X est 0-dimensionnel et si la famille $(O_i)_{i \in I}$ admet une borne supérieure dans l'algèbre $\mathcal{O}$ alors cette borne est O .

PREUVE i) Trivial.

ii) Soit U la borne supérieure de la famille $(O_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{O}$. L'inclusion $O \subseteq U$ est triviale. On démontre l'inclusion inverse $U \subseteq O$ par l'absurde: si O est contenu strictement dans U soit puisque X est 0-dimensionnel, V un ouvert-fermé non vide contenu dans l'ouvert non vide $U \setminus \overline{O}$. Alors $U \setminus V$ est un ouvert-fermé majorant les O_i , strictement contenu dans U : c'est contradictoire!

C.Q.F.D.

THEOREME 1 Soit X un espace topologique et $\mathcal{O}$ l'algèbre de ses ouverts-fermés.

i) Si X est extrêmement discontinu alors l'algèbre $\mathcal{O}$ est complète.

ii) Si l'algèbre $\mathcal{O}$ est complète et si X est 0-dimensionnel alors X est extrêmement discontinu.

PREUVE i) Supposons X extrêmement discontinu. Si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts-

fermés de X l'ensemble $\bigcup_{i \in I} O_i$ est ouvert-fermé donc d'après le lemme précédent c'est la

borne supérieure de $(O_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{O}$.

ii) Soit O un ouvert de X . Soit $(O_i)_{i \in I}$ la famille des ouverts-fermés de X qui sont contenus dans O . Comme X est 0-dimensionnel, cette famille admet dans $\mathcal{O}$ la borne

supérieure $U = \bigcup_{i \in I} O_i = \overline{O}$ donc, puisque $O \subseteq U$ on a

$$\overline{O} \subseteq U = \overline{\overline{O}} = \overline{O}$$

donc $\overline{O} = U$ donc $\overline{O}$ est ouvert.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 1 Soit X un espace topologique 0-dimensionnel. L'espace X est extrêmement discontinu ssi l'algèbre de ses ouverts-fermés est complète.

3/ Morphisme de Stone associé à une algèbre de Boole.

On sait que le théorème de représentation de Stone des algèbres de Boole:

Toute algèbre de Boole est isomorphe à l'algèbre de Boole des ouverts-fermés de son spectre.

équivalent à l'axiome BPI (cf. [Ba]). Cette section 3 propose une relecture dans ZF de la représentation de Stone des algèbres de Boole.

On appelle *spectre* d'une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ l'ensemble Σ de ses idéaux premiers muni de la topologie, dite *de Zariski*, engendrée par les ensembles du type

$$\Omega_a = \{I \in \Sigma ; a \notin I\}, a \in \mathcal{B}$$

Les deux relations

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad \Omega_a \cap \Omega_b = \Omega_{a \wedge b}$$

$$\forall a \in \mathcal{B} \quad \forall b \in \mathcal{B} \quad \Omega_a \cup \Omega_b = \Omega_{a \vee b}$$

montrent que les ouverts de Σ sont les ensembles du type

$$\Omega_J = \bigcup_{a \in J} \Omega_a = \{I \in \Sigma / J \not\subset I\}$$

où J est un idéal de $\mathcal{B}$. Les fermés de Σ sont donc les ensembles du type

$$F_J = \{I \in \Sigma / J \subset I\}$$

où J est un idéal de $\mathcal{B}$. Les ensembles Ω_a , $a \in \Sigma$ sont des ouverts-fermés de Σ donc l'espace Σ est séparé et 0-dimensionnel.

DEFINITION 3 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole, Σ son spectre et $\mathcal{O}$ l'algèbre des ouverts-fermés de Σ . Le morphisme d'algèbres $\mathcal{B} \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}$ est appelé *morphisme de Stone associé à l'algèbre $\mathcal{B}$* .

DEFINITION 4 On dit qu'une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ est *stonienne* lorsque tout idéal propre de $\mathcal{B}$ est contenu dans un idéal premier (ou ce qui revient au même, tout filtre propre de $\mathcal{B}$ est contenu dans un ultrafiltre). On dit qu'elle est *faiblement stonienne* lorsque tout idéal principal propre de $\mathcal{B}$ est contenu dans un idéal premier.

REMARQUE 1 Dans (ZF+BPI) toute algèbre de Boole est stonienne. Dans ZF toute algèbre de Boole bien ordonnable est stonienne.

REMARQUE 2 Toute algèbre de Boole isomorphe à une algèbre stonienne (resp. faiblement stonienne) est stonienne (resp. faiblement stonienne). Toute sous-algèbre d'une algèbre de Boole stonienne (resp. faiblement stonienne) est stonienne (resp. faiblement stonienne).

REMARQUE 3 Si X est un ensemble, l'algèbre $\mathcal{P}(X)$ est faiblement stonienne; cette algèbre est stonienne ssi tout filtre sur X est contenu dans un ultrafiltre.

EXEMPLE 1 Si $\mathcal{M}$ est un modèle de ZF dans lequel BPI n'est pas vérifié, il existe dans $\mathcal{M}$ des ensembles X tels que certains filtres sur X ne sont contenus dans aucun ultrafiltre; pour ces ensembles, l'algèbre $\mathcal{P}(X)$ est faiblement stonienne sans être stonienne.

EXEMPLE 2 Pour tout ensemble X , toute sous-algèbre de $\mathcal{P}(X)$ est faiblement stonienne. En particulier, si X est un espace topologique l'algèbre $\mathcal{O}$ de ses ouverts-fermés est faiblement stonienne.

EXEMPLE 3 Soit X est un espace topologique et $\mathcal{O}$ l'algèbre de ses ouverts-fermés. Si X est quasicompact l'algèbre $\mathcal{O}$ est stonienne. En effet, si $\mathcal{F}$ est un filtre propre de l'algèbre $\mathcal{O}$, soit par quasicompacité de Σ , un élément $a \in \cap \mathcal{F}$. Soit $\mathcal{U} = \{O \in \mathcal{O} / a \in O\}$. L'ensemble $\mathcal{U}$ est un filtre premier de $\mathcal{O}$ qui contient $\mathcal{F}$.

DEFINITION 5 Pour tout idéal I d'un anneau commutatif unitaire A on appelle *radical premier de I* l'idéal intersection des idéaux premiers de A qui contiennent I .

NOTATION Le radical premier d'un idéal I est noté $r(I)$.

LEMME 2 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) L'algèbre $\mathcal{B}$ est faiblement stonienne;
- ii) Tout idéal principal de $\mathcal{B}$ est égal à son radical premier;
- iii) Le radical de l'idéal nul (0) est nul.

THEOREME 2 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole, Σ son spectre et $\mathcal{O}$ l'algèbre de Boole des ouverts-fermés de Σ . Soit ϕ le morphisme de Stone associé à l'algèbre $\mathcal{B}$.

- i) L'application ϕ est injective ssi $\mathcal{B}$ est faiblement stonienne.
- ii) Si Σ est compact alors ϕ est surjective.
- iii) Si $\mathcal{B}$ est complète et faiblement stonienne alors ϕ est bijective.

PREUVE i) Dire que ϕ est injective c'est dire que son noyau $r(0)$ est l'idéal nul, c'est donc dire que $\mathcal{B}$ est faiblement stonienne d'après le lemme 2.

ii) Supposons Σ compact. Soit O un ouvert-fermé de Σ . Si O est vide alors $O = \phi(0_{\mathcal{B}})$ sinon le fermé O est compact: du recouvrement ouvert

$$O = \cup \{\Omega_a, a \in J_2\}$$

extrayons un sous-recouvrement fini

$$O = \cup \{\Omega_a, a \in F\}$$

où F est une partie finie de J_2 . Pour $\alpha = \vee F$ on a donc $O = \phi(\alpha)$.

iii) On suppose $\mathcal{B}$ complète et faiblement stonienne. Soit O un ouvert-fermé de Σ . Si O est vide alors $O = \phi(0_{\mathcal{B}})$ sinon soient J_1 et J_2 deux idéaux de $\mathcal{B}$ tels que

$$O = F_{J_1} = \Omega_{J_2}$$

Soit $\alpha = \vee J_2$. L'adhérence de Ω_{J_2} s'écrit successivement

$$\begin{aligned} \cap \{\Omega_a / \Omega_{J_2} \subseteq \Omega_a\} &= \cap \{\Omega_a / \forall J \in \Sigma (a \in J \Rightarrow J_2 \subseteq J)\} \\ &= \cap \{\Omega_a / J_2 \subseteq r(a)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cap \{ \Omega_a / J \subseteq a \} \\
&= \cap \{ \Omega_a / \alpha \subseteq a \} = \Omega_\alpha
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $O = \phi(\alpha)$.

C.Q.F.D.

QUESTION 1 Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole complète, le morphisme de Stone associé à l'algèbre $\mathcal{B}$ est-il nécessairement surjectif?

COROLLAIRE 2 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole, Σ son spectre et $\mathcal{O}$ l'algèbre des ouverts-fermés de Σ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) L'algèbre $\mathcal{B}$ est stonienne;
- ii) L'algèbre $\mathcal{B}$ est faiblement stonienne et à spectre compact.

PREUVE i) $\Rightarrow$ ii) On suppose $\mathcal{B}$ stonienne. Il est clair que $\mathcal{B}$ est faiblement stonienne. Si Σ est vide alors Σ est compact! Sinon soit $\mathcal{F}$ un filtre de fermés de l'espace Σ . Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des idéaux I de $\mathcal{B}$ tels que $F_I \in \mathcal{F}$. Soit J l'idéal propre $\cup \mathcal{A}$. Comme $\mathcal{B}$ est stonienne, soit P un idéal premier de $\mathcal{B}$ qui contient J . Il est clair que $P \in \mathcal{F}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Comme Σ est compact l'algèbre $\mathcal{O}$ est stonienne (cf. exemple 3). D'après le théorème précédent le morphisme de Stone $\phi_{\mathcal{B}}$ est bijectif donc $\mathcal{B}$ est à son tour stonienne.

C.Q.F.D.

REMARQUE 5 Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole telle que le morphisme de Stone associé soit une bijection l'algèbre $\mathcal{B}$ n'est pas nécessairement stonienne (cf. exemple 1).

COROLLAIRE 3 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) L'algèbre $\mathcal{B}$ est faiblement stonienne;
- ii) Le morphisme de Stone associé à l'algèbre $\mathcal{B}$ est injectif;
- iii) Il existe un morphisme injectif de l'algèbre $\mathcal{B}$ dans l'algèbre des ouverts-fermés d'un espace topologique 0-dimensionnel séparé;
- iv) L'algèbre $\mathcal{B}$ s'injecte dans l'algèbre des ouverts-fermés d'un espace topologique;
- v) Il existe un ensemble X tel que $\mathcal{B}$ soit isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{P}(X)$.

PREUVE Trivial avec tout ce qui précède.

QUESTION 2 Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole faiblement stonienne, existe-t-il nécessairement un espace topologique X tel que $\mathcal{B}$ soit isomorphe à l'algèbre des ouverts-fermés de X ?

4/ Une CNS pour qu'une algèbre représentable soit complète.

DEFINITION 6 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole. On dit que $\mathcal{B}$ est *représentable* lorsque le morphisme de Stone associé à l'algèbre $\mathcal{B}$ est bijectif.

QUESTION 3 Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole représentable alors $\mathcal{B}$ est isomorphe à l'algèbre des ouverts-fermés d'un espace topologique. Réciproque?

COROLLAIRE 4 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole faiblement stonienne, Σ son spectre et ϕ le morphisme de Stone associé à l'algèbre $\mathcal{B}$.

i) Si $\mathcal{B}$ est complète alors Σ est extrêmement discontinu.

ii) Si Σ est extrêmement discontinu et si ϕ est surjectif alors $\mathcal{B}$ est complète.

PREUVE i) Si $\mathcal{B}$ est complète et faiblement stonienne alors ϕ est bijectif (cf. théorème 2) donc l'algèbre $\mathcal{O}$ des ouverts-fermés de Σ est à son tour complète. Puisque Σ est 0-dimensionnel il est donc aussi extrêmement discontinu d'après le théorème 1.

ii) Si Σ est extrêmement discontinu, l'algèbre $\mathcal{O}$ est complète (théorème 1). De plus ϕ est bijectif (théorème 2) donc l'algèbre $\mathcal{B}$ est complète.

C.Q.F.D.

REMARQUE 6 Dans les conditions précédentes, si Σ est un compact extrêmement discontinu l'algèbre $\mathcal{B}$ n'est pas nécessairement complète. Par exemple, si on se place dans un modèle de ZF dans lequel tout ultrafiltre sur ω est trivial, l'algèbre $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\omega)/\text{fin}$ (où fin désigne l'idéal des parties finies de ω) est non complète mais son spectre Σ est vide.

COROLLAIRE 5 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole représentable. L'algèbre $\mathcal{B}$ est complète ssi son spectre Σ est extrêmement discontinu.

PREUVE Résulte du corollaire précédent.

5/ Une CNS pour que le spectre d'une algèbre de Boole soit compact.

THEOREME 3 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole, Σ son spectre et $\mathcal{O}$ l'algèbre des ouverts-fermés de Σ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

i) L'espace Σ est compact;

ii) L'algèbre $\mathcal{O}$ est stonienne.

PREUVE i) $\Rightarrow$ ii) cf. exemple 3.

ii) $\Rightarrow$ i) On suppose $\mathcal{O}$ stonienne. Puisque Σ est séparé et 0-dimensionnel, dire que Σ est compact revient à dire que pour tout filtre propre $\mathcal{F}$ de l'algèbre $\mathcal{O}$ l'ensemble $\cap \mathcal{F}$ est

non vide. Si $\mathcal{F}$ est un filtre propre de $\mathcal{O}$, soit puisque $\mathcal{O}$ est stonienne, $\mathcal{U}$ un filtre premier de $\mathcal{O}$ qui contient $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des idéaux J de $\mathcal{B}$ tels que $F_J \in \mathcal{F}$. L'idéal premier $I = \cup \mathcal{J}$ appartient à l'ensemble $\cap \mathcal{F}$.

C.Q.F.D.

REMARQUE 7 Dans les conditions précédentes, si $\mathcal{O}$ est stonienne l'algèbre $\mathcal{B}$ ne l'est pas forcément (cas où Σ est vide).

REMARQUE 8 Il se peut que le spectre Σ d'une algèbre de Boole $\mathcal{B}$ soit compact et non vide sans que $\mathcal{B}$ soit stonienne. En effet soit $\mathcal{M}$ un modèle de ZF qui ne satisfait pas BPI. Soit dans $\mathcal{M}$ un ensemble infini X et un idéal propre I de l'algèbre $\mathcal{P}(X)$ tels qu'aucun idéal premier de $\mathcal{P}(X)$ ne contienne I . Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Boole à deux éléments et $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole $\mathcal{A} \times \mathcal{P}(X)/I$. L'algèbre $\mathcal{B}$ possède un unique idéal premier, à savoir $I = \{(0, v) \in \mathcal{B}; v \in \mathcal{P}(X)/I\}$ donc le spectre de $\mathcal{B}$ est compact et non vide mais l'ensemble $J = \{(u, 0) \in \mathcal{B}/u \in \mathcal{A}\}$ est un idéal propre de $\mathcal{B}$ contenu dans aucun idéal premier de $\mathcal{B}$ donc l'algèbre $\mathcal{B}$ n'est pas stonienne. Plus généralement, si K est un compact 0-dimensionnel non vide de $\mathcal{M}$, soit $\mathcal{B}_I$ l'algèbre de Boole des ouverts-fermés de K et $\mathcal{B}$ l'algèbre de Boole $\mathcal{B}_I \times \mathcal{P}(X)/I$. Dans ces conditions le spectre de $\mathcal{B}$ est homéomorphe à l'espace K mais $\mathcal{B}$ n'est pas stonienne. Ceci montre l'existence d'algèbres de Boole non stoniennes dont le spectre est un compact 0-dimensionnel arbitraire.

6/ Les compacts extrêmement discontinus sont finis!

LEMME 3 Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de Boole infinie dénombrable. Il existe un ensemble infini dénombrable D formé d'éléments deux à deux disjoints et non nuls de $\mathcal{B}$.

PREUVE Si l'ensemble $\mathcal{At}$ des atomes de l'algèbre de Boole $\mathcal{B}$ est infini le résultat est évident sinon $\mathcal{At}$ est fini: soit $u = \vee \{a; a \in \mathcal{At}\}$ et soit $\mathcal{C}$ l'algèbre de Boole $\{x \in \mathcal{B} / x \wedge u = 0\}$. Puisque l'algèbre de Boole $\mathcal{C}$ est sans atomes et dénombrable on peut construire par récurrence une suite $(b_n)_{n \in \omega}$ d'éléments non nuls de $\mathcal{C}$ telle que

$$\forall m \in \omega \quad \forall n \in \omega \quad b_m \wedge b_n = 0_{\mathcal{B}}$$

L'ensemble $D = \{b_n; n \in \omega\}$ convient.

C.Q.F.D.

DEFINITION 7 On dit qu'un ensemble X est *Dedekind-infini* (en abrégé *D-infini*) lorsque ω s'injecte dans X .

LEMME 4 Si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole *D-infinie* et σ -complète alors il existe un morphisme injectif d'algèbres de Boole de $\mathcal{P}(\omega)$ dans $\mathcal{B}$.

PREUVE Soit A une partie infinie dénombrable de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ l'algèbre de Boole engendrée par l'ensemble A . Soit $B = A \cup \{a^c; a \in A\}$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est dénombrable, car image de l'ensemble dénombrable $\mathcal{P}_{fin}(\mathcal{P}_{fin}(B))$ par l'application qui à tout $(\sigma_j)_{j=0}^m = 0$ associe

$$\bigvee \{ \bigwedge \{ \sigma_j(i); i \in \text{dom}(\sigma_j) \}; 0 \leq j \leq m \}$$

Soit par le lemme précédent un ensemble D infini dénombrable d'éléments non nuls et deux à deux disjoints de l'algèbre $\mathcal{C}$. Soit u la borne supérieure de D dans $\mathcal{B}$. Si $u=1$ on pose $E=D$ et si $u < 1$ on pose $E = D \cup \{u^c\}$. Soit enfin ϕ une bijection de ω sur E . Pour toute partie X de ω soit $f(X) = \bigvee \{ \phi(n); n \in X \}$. L'application f réalise un morphisme injectif d'algèbres de Boole de $\mathcal{P}(\omega)$ dans $\mathcal{B}$.

C.Q.F.D.

DEFINITION 8 Soit X un espace topologique. On dit que X est σ -extrêmement discontinu ssi il est 0-dimensionnel et si l'algèbre de ses ouverts-fermés est σ -complète.

REMARQUE 9 Tout espace 0-dimensionnel extrêmement discontinu est σ -extrêmement discontinu.

THEOREME 4 Les énoncés suivants sont équivalents:

- i) Tout filtre sur ω est contenu dans un ultrafiltre.
- ii) Il existe un compact extrêmement discontinu ayant un ensemble D -infini d'ouverts-fermés.
- iii) Il existe un compact σ -extrêmement discontinu ayant un ensemble D -infini d'ouverts-fermés.

PREUVE i) $\Rightarrow$ ii) Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre $\mathcal{P}(\omega)$, Σ son spectre et $\mathcal{O}$ l'algèbre des ouvert-fermés de Σ . Selon i), l'algèbre $\mathcal{B}$ est stonienne donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{O}$ sont isomorphes et Σ est compact. L'espace Σ est extrêmement discontinu car l'algèbre $\mathcal{O}$, isomorphe à l'algèbre $\mathcal{B}$, est complète. L'algèbre $\mathcal{O}$ est aussi D -infinie.

ii) $\Rightarrow$ iii) Trivial car tout compact extrêmement discontinu est 0-dimensionnel donc σ -extrêmement discontinu.

iii) $\Rightarrow$ i) Soit X un compact σ -extrêmement discontinu ayant un ensemble D -infini d'ouverts-fermés. Soit $\mathcal{O}$ l'algèbre des ouvert-fermés de Σ . Puisque X est compact, l'algèbre $\mathcal{O}$ est stonienne. Puisque X est σ -extrêmement discontinu, l'algèbre $\mathcal{O}$ est σ -complète. De plus, $\mathcal{O}$ est D -infinie: soit f un morphisme injectif d'algèbres de Boole de $\mathcal{P}(\omega)$ dans $\mathcal{O}$. Isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{O}$, l'algèbre $\mathcal{P}(\omega)$ est elle aussi stonienne.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 6 Si $\mathcal{M}$ est un modèle de ZF satisfaisant les énoncés:

W_ω : Tout ensemble infini est Dedekind-infini.

U_ω : Il existe sur ω un filtre non contenu dans un ultrafiltre.

alors dans $\mathcal{M}$ tout compact σ -extrêmement discontinu est fini.

EXEMPLE 4 Dans le modèle de (ZF+DC) construit par Pincus et Solovay (cf. [Pi-So] théorème 2 page 179) tout ultrafiltre est trivial. Ce modèle vérifie l'énoncé W_ω puisqu'il vérifie l'axiome DC.

7/ L'énoncé BCED n'implique pas l'énoncé BC.

On va voir que dans certains modèles de ZF ne satisfaisant pas l'axiome BC, tout compact σ -extrêmement discontinu est fini et donc de Baire.

LEMME 5 Il existe une formule $\phi(x)$ ayant une variable libre telle que dans tout modèle $\mathcal{M}$ de la théorie ZF on ait les trois propriétés suivantes:

i) $a \in \mathcal{M} \Rightarrow \phi(\{a\})$

ii) $[f \in \mathcal{M}, \alpha \text{ est un ordinal de } \mathcal{M} \text{ et } \text{dom}(f) = \alpha \text{ et } \forall t \in \alpha \phi(f(t))] \Rightarrow \phi(\bigcup_{t \in \alpha} f(t))$

iii) si $\psi(x)$ est une formule ayant une variable libre telle qu'on ait i) et ii) alors pour tout $x \in \mathcal{M}$, $\phi(x) \Rightarrow \psi(x)$.

PREUVE cf. [K], pages 140-1.

DEFINITION 9 Si $\mathcal{M}$ est un modèle de la théorie ZF on dit qu'un ensemble x de $\mathcal{M}$ est presque bien ordonné lorsqu'il satisfait la formule $\phi(x)$ du lemme précédent.

De manière informelle, les ensembles presque bien ordonnés constituent la plus petite classe de $\mathcal{M}$ close par union bien ordonnée et contenant les singletons de $\mathcal{M}$.

DEFINITION 10 On dit qu'un ensemble X est bon lorsque toute σ -algèbre de Boole stonienne contenant X et σ -engendrée par X est finie.

THEOREME 5 Soit $\mathcal{M}$ un modèle de ZF dans lequel il existe sur ω un filtre contenu dans aucun ultrafiltre. Dans $\mathcal{M}$ tout ensemble presque bien ordonné est bon.

PREUVE Il suffit de montrer que pour tout ordinal $\lambda \in \mathcal{M}$ et toute famille $(I_\alpha)_{\alpha < \lambda}$ de bons ensembles, l'ensemble $I = \bigcup_{\alpha < \lambda} I_\alpha$ est bon. Procédons par récurrence transfinie sur

l'ordinal λ . Si λ est un ordinal successeur l'ensemble I est bon en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que la réunion de deux bons ensembles est un bon ensemble! Si λ est un ordinal limite > 0 et si $\mathcal{B}$ est une algèbre de Boole stonienne et σ -complète contenant I et σ -engendrée par I , soit pour tout $\alpha \in \lambda$, $\mathcal{B}_\alpha$ l'algèbre de Boole

σ -complète engendrée par X_α dans $\mathcal{B}$. Chaque $\mathcal{B}_\alpha$, sous-algèbre de l'algèbre stonienne $\mathcal{B}$ est stonienne; par hypothèse de récurrence chaque X_α est bon donc chaque $\mathcal{B}_\alpha$ est finie.

De plus, $\mathcal{B}$ est l'algèbre de Boole σ -complète engendrée par $\bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{B}_\alpha$. S'il existe un point

a non isolé dans le spectre de $\mathcal{B}$ considérons pour tout $\alpha \in \lambda$ l'élément suivant de $\mathcal{B}$:

$$\Omega_\alpha = \bigcap \{U \in \mathcal{B}_\alpha \mid a \in U\}$$

Posons $O_0 = \Omega_0$ puis pour tout $n \in \omega$ posons $O_{n+1} = \Omega_{\phi(n)}$ où $\phi(n)$ est le premier élément de l'ensemble

$$\{\alpha \in \lambda \mid \Omega_\alpha \text{ est strictement contenu dans } O_n\}$$

La suite $(O_n)_{n \in \omega}$ est strictement décroissante dans $\mathcal{B}$ donc l'algèbre de Boole σ -complète et stonienne $\mathcal{B}$ est D-infinie donc par le théorème 4, tout filtre sur ω est contenu dans ultrafiltre: c'est contradictoire! Ainsi tout point du compact $\text{Spec}(\mathcal{B})$ est isolé donc $\text{Spec}(\mathcal{B})$ est fini donc l'algèbre $\mathcal{B}$ est finie (car $\mathcal{B}$ est stonienne) donc I est bon.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 7 *Soit $\mathcal{M}$ un modèle de ZF dans lequel il existe sur ω un filtre contenu dans aucun ultrafiltre et dans lequel tout ensemble est presque bien ordonné. Dans un tel modèle, tout compact σ -extrêmement discontinu est fini.*

EXEMPLE 5 Le modèle de Blass (cf.[BI]) vérifie les conditions du corollaire précédent. Dans ce modèle, il existe une suite $(P_n)_{n \in \omega}$ de paires de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega))$ telle que l'ensemble

$\bigcap_{n \in \omega} P_n$ est vide donc (cf. [Mo2]) il existe dans ce modèle des compacts qui ne sont pas de Baire.

\newpage

REFERENCES

- [Ba] Banachewski, *The Power of the Ultrafilter Theorem*, J. Lond. Math. Soc. (2) 21 (1983), 193-202.
- [Bl] Blass, *A model without Ultrafilters*, Bull. Acad. Pol. Sci. Vol.XXV, No.4, (1977).
- [Bk] Bourbaki, *Topologie générale*, chapitres 5-10, Paris.
- [G] Goldblatt, *On the role of the Baire Category Theorem and Dependent Choice in the Foundations of Logic*, Journal of Symbolic Logic, vol.50, No2, (1985).
- [Jech] Jech, *The Axiom of Choice*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
- [K] Keisler, *Model Theory for Infinitary Logic*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.
- [Mo1] M.Morillon, *Topologie, analyse nonstandard et axiome du choix*, Thèse de 3^e cycle, Université Blaise Pascal (Clermont II), 1988.
- [Mo2] M.Morillon, *manuscrit*.
- [Pi-Sol] Pincus and Solovay, *Definability of Measures and Ultrafilters*, The Journal of Symbolic Logic, Vol.42, No2, (1977), 179-90.