Détection des fonctions de rang linéaires à terme

Anthony ALEZAN[1] Roberto BAGNARA[2]
Fred MESNARD[1] Étienne PAYET[1]

[1] LIM, université de la Réunion, France
[2] BUGSENG & Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Parma, Italie

JFPC 2013

Objectif

Terminaison de programme
Le cas des boucles SLC (*single-path linear constraint*) rationnelles

Plan

Boucle SLC (*single-path linear constraint*) rationnelle

$$\textbf{tant que } (B\ \mathbf{x} \leq \mathbf{b}) \textbf{ faire } A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} \leq \mathbf{c}$$

où :

- $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ en entrée de boucle à valeur dans $\mathbb{Q}$
- $\mathbf{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)^T$ après une itération à valeur dans $\mathbb{Q}$
- $B \in \mathbb{Z}^{p \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^p$, $A \in \mathbb{Z}^{q \times 2n}$ et $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^q$

Notation :

$$p(\mathbf{x}) \leftarrow B\ \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, A \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} \leq \mathbf{c},\ \ p(\mathbf{x}')$$

Exemple

La boucle

$$\textbf{tant que } (x \geq 0) \textbf{ faire } x' := x - 1$$

est notée :

$$p(x) \leftarrow x \geq 0, x' = x - 1, p(x')$$

Opérationnellement :

$p(9) \Rightarrow 9 \geq 0 \wedge x' = 9 - 1 = 8$
$p(8) \Rightarrow 8 \geq 0 \wedge x' = 8 - 1 = 7$
...
$p(0) \Rightarrow 0 \geq 0 \wedge x' = 0 - 1 = -1$
$p(-1) \Rightarrow -1 \geq 0$ *stop* !

Termine car l'argument décroît d'une unité tout en restant minoré par 0.

Fonction de rang linéaire

Definition

Soit C la boucle SLC rationnelle $p(\mathbf{x}) \leftarrow c(\mathbf{x}, \mathbf{x}'),\ p(\mathbf{x}')$, où p est une relation n-aire. Une *fonction de rang linéaire* ρ pour C est une application linéaire de $\mathbb{Q}^n$ vers $\mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \left[c(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} \rho(\mathbf{x}) & \geq & 1 + \rho(\mathbf{x}') \\ \rho(\mathbf{x}) & \geq & 0 \end{array} \right. \right]$$

Exemple Pour $p(x) \leftarrow x \geq 0, x' = x - 1, p(x')$, $\rho(x) = x$ est une fonction de rang linéaire : $\rho(x) - \rho(x') = x - x' = x - (x - 1) = 1$ donc $c(x, x') \Rightarrow [\rho(x) \geq 1 + \rho(x') \wedge \rho(x) \geq 0]$.

Vérification triviale. Détection ? Algo Podelski & Rybalchenko (2004)

Lemme de Farkas

$$S := \left\{ \begin{array}{lllllllll} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & + & b_1 & \geq & 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & + & b_m & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Nous supposons que S est soluble.
Le lemme de Farkas établit l'équivalence entre :

$$\forall x_1, \ldots, x_n \, [S \Rightarrow c_1x_1 + \cdots + c_nx_n + d \geq 0]$$

et

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_n \geq 0$$
$$\left\{ \begin{array}{lll} c_1 & = & \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{i,1} \\ \ldots \\ c_n & = & \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{i,n} \\ d & \geq & \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \end{array} \right.$$

Pour la boucle C_1 :

$$p(x,y) \leftarrow x \geq 0, y' \leq y-1, x' \leq x+y, y \leq -1, p(x',y')$$

l'existence d'une fonction de rang linéaire $\rho(x,y) = ax + by$ s'exprime par :

$$\exists a, b \ \forall x, y, x', y' \quad \left\{ \begin{array}{lll} x & \geq & 0 \\ y' & \leq & y-1 \\ x' & \leq & x+y \\ y & \leq & -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} ax+by & \geq & 1+ax'+by' \\ ax+by & \geq & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Résolution par élimination des quantificateurs. Décidable mais coûteux !
Appliquons le lemme de Farkas (a et b paramètres).

Décroissance de la fonction de rang :

$$\forall x, y, x', y' \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y' & \leq & y - 1 \\ x' & \leq & x + y \\ y & \leq & -1 \end{array} \right. \Rightarrow \quad ax + by \quad \geq \quad 1 + ax' + by'$$

Positivité de la fonction de rang :

$$\forall x, y, x', y' \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y' & \leq & y - 1 \\ x' & \leq & x + y \\ y & \leq & -1 \end{array} \right. \Rightarrow \quad ax + by \quad \geq \quad 0$$

Application du lemme de Farkas

$$\begin{array}{lcccccccc}
\lambda_1 : & 1x & +0y & +0x' & +0y' & +0 & \geq & 0 \\
\lambda_2 : & 1x & +1y & -1x' & +0y' & +0 & \geq & 0 \\
\lambda_3 : & 0x & +1y & +0x' & -1y' & -1 & \geq & 0 \\
\lambda_4 : & 0x & -1y & +0x' & +0y' & -1 & \geq & 0 \\
\Rightarrow & & & & & & & \\
 & ax & +by & -ax' & -by' & -1 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccc}
\lambda'_1 : & 1x & +0y & +0x' & +0y' & +0 & \geq & 0 \\
\lambda'_2 : & 1x & +1y & -1x' & +0y' & +0 & \geq & 0 \\
\lambda'_3 : & 0x & +1y & +0x' & -1y' & -1 & \geq & 0 \\
\lambda'_4 : & 0x & -1y & +0x' & +0y' & -1 & \geq & 0 \\
\Rightarrow & & & & & & & \\
 & ax & +by & +0x' & +0y' & +0 & \geq & 0
\end{array}$$

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_4 \geq 0$$
$$\begin{cases} a & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ b & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ -a & = & -\lambda_2 \\ -b & = & -\lambda_3 \\ -1 & \geq & -\lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}$$

$$\exists \lambda'_1 \geq 0, \ldots, \lambda'_4 \geq 0$$
$$\begin{cases} a & = & \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ b & = & \lambda'_2 + \lambda'_3 - \lambda'_4 \\ 0 & = & -\lambda'_2 \\ 0 & = & -\lambda'_3 \\ 0 & \geq & -\lambda'_3 - \lambda'_4 \end{cases}$$

Conjonction

$$\exists a, b\ \exists \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_4 \geq 0, \lambda'_1 \geq 0, \ldots, \lambda'_4 \geq 0$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ b & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ -a & = & -\lambda_2 \\ -b & = & -\lambda_3 \\ -1 & \geq & -\lambda_3 - \lambda_4 \\ a & = & \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ b & = & \lambda'_2 + \lambda'_3 - \lambda'_4 \\ 0 & = & -\lambda'_2 \\ 0 & = & -\lambda'_3 \\ 0 & \geq & -\lambda'_3 - \lambda'_4 \end{array}\right.$$

Résolution d'inéquations linéaires :

$b = 0 = \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda'_2 = \lambda'_3 = \lambda'_4, a = 1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda'_1$

La boucle SLC rationnelle C_1 admet pour fonction de rang linéaire $\rho(x, y) = x$ car effectivement :

$$\forall x, y, x', y'$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ y' & \leq & y-1 \\ x' & \leq & x+y \\ y & \leq & -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & \geq & 1+x' \\ x & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Les fonctions de rang linéaires à terme

Definition

Soit C la boucle SLC rationnelle $p(\mathbf{x}) \leftarrow c(\mathbf{x},\mathbf{x}'),\ p(\mathbf{x}')$, où p est une relation n-aire et $f(\mathbf{x})$ une fonction linéaire vérifiant :

$$\forall \mathbf{x},\mathbf{x}'\ c(\mathbf{x},\mathbf{x}') \Rightarrow f(\mathbf{x}') \geq 1 + f(\mathbf{x}).$$

Une *fonction de rang linéaire à terme* ρ pour (C, f) est une application linéaire de $\mathbb{Q}^n$ vers $\mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\exists k\, \forall \mathbf{x},\mathbf{x}' \left\{ \begin{array}{l} c(\mathbf{x},\mathbf{x}') \\ f(\mathbf{x}) \geq k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \rho(\mathbf{x}) & \geq & 1 + \rho(\mathbf{x}') \\ \rho(\mathbf{x}) & \geq & 0 \end{array} \right.$$

- La boucle C_2 :

$$p(x,y) \leftarrow x \geq 0, x' \leq x+y, y' \leq y-1, p(x',y')$$

n'admet pas de fonction de rang linéaire.

- La fonction $f(x,y) = -y$ croît strictement pour cette boucle.
- L'existence d'une fonction de rang linéaire à terme pour la boucle , s'exprime formellement, en posant $\rho(x,y) = ax + by$:

$$\exists a,b,k\ \forall x,y,x',y' \\ \left\{ \begin{array}{lll} x & \geq & 0 \\ x' & \leq & x+y \\ y' & \leq & y-1 \\ -y & \geq & k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lll} ax+by & \geq & 1+ax'+by' \\ ax+by & \geq & 0 \end{array} \right. \qquad (2)$$

Utilisation du lemme de Farkas

$DEC(a, b, k)$:

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_4 \geq 0$$
$$\begin{cases} a & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ b & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ -a & = & -\lambda_2 \\ -b & = & -\lambda_3 \\ -1 & \geq & -\lambda_3 - k\lambda_4 \end{cases}$$

$POS(a, b, k)$:

$$\exists \lambda'_1 \geq 0, \ldots, \lambda'_4 \geq 0$$
$$\begin{cases} a & = & \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ b & = & \lambda'_2 + \lambda'_3 - \lambda'_4 \\ 0 & = & -\lambda'_2 \\ 0 & = & -\lambda'_3 \\ 0 & \geq & -\lambda'_3 - k\lambda'_4 \end{cases}$$

$DEC_1(a, b)$:

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 = 0$$
$$\begin{cases} a & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ b & = & \lambda_2 + \lambda_3 \\ -a & = & -\lambda_2 \\ -b & = & -\lambda_3 \\ -1 & \geq & -\lambda_3 \end{cases}$$

$DEC_2(a, b)$, en posant $P = k\lambda_4$:

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 > 0, P$$
$$\begin{cases} a & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ b & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ -a & = & -\lambda_2 \\ -b & = & -\lambda_3 \\ -1 & \geq & -\lambda_3 - P \end{cases}$$

Idem pour POS.

Lemma

La formule $\exists k \, DEC(a, b, k)$ *est équivalente à* $DEC_1(a, b) \vee DEC_2(a, b)$.
La formule $\exists k \, POS(a, b, k)$ *est équivalente à* $POS_1(a, b) \vee POS_2(a, b)$.

Résumé :

L'existence d'une fonction de rang linéaire à terme se résume donc à la satisfiabilité d'au moins un des quatre systèmes linéaires suivant :

$$DEC_1(a, b) \wedge POS_1(a, b)$$
$$DEC_1(a, b) \wedge POS_2(a, b)$$
$$DEC_2(a, b) \wedge POS_1(a, b)$$
$$DEC_2(a, b) \wedge POS_2(a, b)$$

Emploi d'un algorithme de résolution d'inéquations linéaires.
Pour notre exemple, $DEC_2(a, b) \wedge POS_1(a, b)$ admet une solution.

$$\exists \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0, \lambda_4 > 0, P, \lambda'_1 \geq 0, \lambda'_2 \geq 0, \lambda'_3 \geq 0$$
$$\left\{\begin{array}{lcl} a & = & \lambda_1 + \lambda_2 \\ b & = & \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 \\ -a & = & -\lambda_2 \\ -b & = & -\lambda_3 \\ -1 & \geq & -\lambda_3 - P \\ a & = & \lambda'_1 + \lambda'_2 \\ b & = & \lambda'_2 + \lambda'_3 \\ 0 & = & -\lambda'_2 \\ 0 & = & -\lambda'_3 \\ 0 & \geq & -\lambda'_3 \end{array}\right.$$

$b = 0 = \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda'_2 = \lambda'_3$, $a = 1 = \lambda'_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = P, P/\lambda_4 = k = 1$.

La boucle SLC rationnelle C_2 admet une fonction de rang linéaire $\rho(x, y) = x$ à partir du seuil $k = 1$ car effectivement :

$$\exists k \geq 1 \ \forall x, y, x', y' \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x & \geq & 0 \\ x' & \leq & x + y \\ y' & \leq & y - 1 \\ -y & \geq & k \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x & \geq & 1 + x' \\ x & \geq & 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Un algorithme polynomial correct et complet

Algorithme 1 Existence d'une fonction de rang linéaire à terme

Entrée : $p(\mathbf{x}) \rightarrow c(\mathbf{x},\mathbf{x}'), p(\mathbf{x}')$ une boucle n-aire et $f(\mathbf{x})$ une fonction vérifiant $\forall \mathbf{x},\mathbf{x}'\ c(\mathbf{x},\mathbf{x}') \Rightarrow f(\mathbf{x}') \geq 1 + f(\mathbf{x})$

Sortie : Décide l'existence d'une fonction de rang linéaire à terme $\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{ax} = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ à partir du seuil k

1: $DEC(\mathbf{a}, k)$:= Farkas pour la décroissance de ρ
2: $DEC_1(\mathbf{a}), DEC_2(\mathbf{a})$:=linéarisation de $DEC(\mathbf{a}, k)$
3: $POS(\mathbf{a}, k)$:= Farkas pour la positivité ρ
4: $POS_1(\mathbf{a}), POS_2(\mathbf{a})$:=linéarisation de $POS(\mathbf{a}, k)$
5: **si** $\bigvee_{1\leq i,j\leq 2} DEC_i(\mathbf{a}) \wedge POS_j(\mathbf{a})$ est satisfiable **alors**
6:     **retourner vrai**
7: **sinon**
8:     **retourner faux**
9: **fin si**

Notre contribution

- Définition des fonctions de rang linéaires à terme
- Un algorithme polynomial correct et complet

Extensions

- Détection conjointe de la fonction de rang linéraire à terme et de la fonction croissante associée
- Fonctions de rang linéaires à terme pour les boucles SLC entières

```
%% fast_term_test(Bin:bin) is semidet.
%
% vrai ssi pour la clause binaire satifiable recursive Bin,
% il existe :
% - un argument decroissant d'une unité et minore
% ou
% - un argument croissant d'une unite et majore


fast_term_test(Cls) :-
    copy_term(Cls,bin(H,Cs,B)),
    q_op:tell_cs(Cs),
    functor(H,_Pred,N),
    fast_term_test(N,H,B).

fast_term_test(I,H,B) :-
    I > 0,
    arg(I,H,Hi),
    arg(I,B,Bi),
    (   (  inf(Hi,_),entailed(Hi >= Bi + 1)
        ;  sup(Hi,_),entailed(Bi >= Hi + 1))
    ->  true
    ;   J is I-1,
        fast_term_test(J,H,B)).


:- begin_tests(ftt).

test(ftt1,[fail]) :- fast_term_test(bin(p(X),[X>= -2, X=Y, X=< 2],p(Y))).
test(ftt2,[fail]) :- fast_term_test(bin(p(X,Z),[X+1=<Y,Z=T],p(Y,T))).
test(ftt3) :- fast_term_test(bin(p(X),[X>=Y+1,X>=0],p(Y))).
test(ftt4) :- fast_term_test(bin(p(X),[X+1=<Y,X=<10],p(Y))).
test(ftt5) :- fast_term_test(bin(p(X,Z),[X+1=<Y,X=<10,Z=T],p(Y,T))).

:- end_tests(ftt).
```