UNIV. PARIS 7
Preuve de prog.

Définition inductives de prédicats

TP 4

M2 - PRO

■ ■ ■

Exercice 1. – Définitions de la clôture réflexive-transitive

Sur un type de données `T : Type` fixé, on cherche à définir la clôture réflexive-transitive d'une relation `R : T → T → Prop`, qui est par définition la plus petite relation réflexive et transitive contenant la relation `R`. Il est naturel d'introduire en Coq cette notion au moyen de la définition inductive suivante (paramétrée par la relation `R`) :

```
Inductive clos1 (R : T → T → Prop) : T → T → Prop :=
  | cl1_base : forall x y, R x y → clos1 R x y
  | cl1_refl : forall x, clos1 R x x
  | cl1_trans : forall x y z, clos1 R x y → clos1 R y z → clos1 R x z.
```

Cependant, il est souvent commode dans les démonstrations de définir la notion de clôture réflexive-transitive d'une manière un peu différente, à savoir comme la relation `R'` engendrée par les règles suivantes :

1. Pour tout `x`, `R' x x` (cas de base) ;
2. Si `R' x y` et `R y z`, alors `R' x z` (cas inductif).

Cette définition alternative se modélise en Coq au moyen de la définition inductive suivante :

```
Inductive clos2 (R : T → T → Prop) : T → T → Prop :=
  | cl2_refl : forall x, clos2 R x x
  | cl2_next : forall x y z, clos2 R x y → R y z → clos2 R x z.
```

Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence des deux définitions. Pour ce faire, on pourra suivre les étapes suivantes :

1. Montrer que `clos2 R x y` entraîne `clos1 R x y` (pour tous `x, y : T`).
2. Montrer que `R x y` entraîne `clos2 R x y` (pour tous `x, y : T`).
3. Montrer que `clos2 R` est une relation transitive.
4. En déduire que `clos1 R x y` entraîne `clos2 R x y` (pour tous `x, y : T`).
5. Montrer que l'opération de clôture réflexive-transitive est idempotente, c'est-à-dire que : `clos1 (clos1 R) x y ⇔ clos1 R x y` pour tous `x, y : T`.

Exercice 2. – Définitions de la clôture réflexive-transitive (suite)

On travaille toujours avec un type `T : Type` fixé.

1. Définir la relation identité `id : T → T → Prop` ainsi que l'opérateur de composition de relations `comp : (T → T → Prop) → (T → T → Prop) → T → T → Prop`.
2. Définir une fonction `puiss : (T → T → Prop) → nat → T → T → Prop` telle que `puiss R n` calcule la puissance n-ième de la relation (par l'opération de composition).

Une troisième définition de la clôture réflexive-transitive d'une relation `R` est donnée par la réunion des puissances successives de `R`, c'est-à-dire par :

```
Definition clos3 (R : T → T → Prop) (x y : T) := exists n, puiss R n x y.
```

3. Montrer que cette définition est équivalente aux deux précédentes (`clos1` et `clos2`).