Licence STS, semestre 4 — 2013–14
Mathématiques pour l'Informatique (Info 229) — 27 mars 2014
http://www.lri.fr/~paulin/MathInfo

TP 3 - Définitions par clôture

Un squelette de fichier Coq vous est fourni sur la page du cours.

Exercice 1 (Parité)
En Coq, une définition par clôture se construit comme une définition `inductive`. Par exemple, la définition des entiers pairs par les deux règles suivantes :

$$\frac{}{\text{pair}(0)} \qquad \frac{\text{pair}(x)}{\text{pair}(x+2)}$$

s'écrit en Coq comme ceci :

```
Inductive pair : nat -> Prop :=
  | pair_0 : pair 0
  | pair_ss : forall x, pair x -> pair (S (S x)).
```

Chacune des règles est nommée, ce qui permet de les utiliser dans les raisonnements. Par exemple, si l'on doit prouver `pair 4` la commande `apply pair_ss` nous ramène à prouver `pair 2`.

Quand on a une hypothèse construite par clôture, comme `x : nat` ou `H : even x`, on peut raisonner dessus par induction, en utilisant la tactique `induction x` ou `induction H`. Le principe d'induction utilisé est généré automatiquement par Coq. Pour afficher celui généré pour `pair`, on utilisera la commande `Check pair_ind`.

1. Définir de la même façon le prédicat `impair`.
2. Prouver que le successeur d'un entier pair est impair, et vice versa.
   (Attention, doit-on raisonner par induction sur l'entier `x` *ou sur le prédicat* `pair x` *?)*
3. Prouver que tout entier est soit pair soit impair.

Exercice 2 (Définition de fonction par clôture)
On se propose de représenter la fonction d'addition par la relation `plus` que l'on définit par clôture de la manière suivante :

$$\frac{}{plus\ 0\ x\ x} \qquad \frac{}{plus\ x\ 0\ x} \qquad \frac{plus\ x\ y\ z}{plus\ x\ (S\ y)\ (S\ z)} \qquad \frac{plus\ x\ y\ z}{plus\ (S\ x)\ y\ (S\ z)}$$

1. Définir `plus` comme une définition inductive en Coq.
2. Montrer cette relation est symétrique et totale.
3. Montrer qu'elle est contenue dans l'addition :

   ```
   Theorem plus_plus : forall x y z, plus x y z -> z = x+y.
   ```

4. En déduire que la relation `plus` est fonctionnelle.
5. Peut-on enlever des règles d'inférence dans la définition de `plus` sans changer la relation obtenue ? Qu'est-ce que cela change dans les preuves des questions précédentes ?