Université de la Réunion Mai 2015

L3 d'informatique

Optimisation et programmation par contraintes

Durée : 60 minutes – sans document ni moyen électronique

Répondre uniquement dans les cadres prévus à cet effet et soigner la présentation

Nom :	Signature :
Prénom(s) :	

Exercice 1 (5 •) Une entreprise locale souhaite choisir des emplacements pour construire des usines et des entrepôts, sachant que :

- deux emplacements sont possibles : Le Port et Saint Pierre.
- on ne peut construire un entrepôt que dans une ville où l'on a aussi une usine.
- on ne peut construire plus d'un entrepôt.
- on associe à chaque construction (d'une usine ou d'un entrepôt dans chacun des lieux envisagés) :
  - sa valeur estimée,
  - son coût de construction.

Objectif de l'entreprise : maximiser la valeur totale estimée, en ne dépassant pas une valeur limite sur les coûts.

En millions d'euros, l'entreprise ne souhaite pas dépenser plus de 10 et elle dispose des informations suivantes :
Usine au Port : valeur estimée : 9, coût de construction 6
Usine à Saint Pierre : valeur estimée : 5, coût de construction 3
Entrepôt au Port : valeur estimée : 6, coût de construction 5
Entrepôt à Saint Pierre : valeur estimée : 4, coût de construction 2

La modélisation de ce problème introduit les quatre variables binaires :

- $x_1 = 1$ ssi construction d'une usine au Port
- $x_2 = 1$ ssi construction d'une usine à Saint Pierre
- $x_3 = 1$ ssi construction d'un entrepôt au Port
- $x_4 = 1$ ssi construction d'un entrepôt à Saint Pierre

Donnez la fonction objectif à maximiser :

Exprimez la limite maximum sur les coûts de construction :

Exprimez qu'on ne peut construire plus d'un entrepôt :

Exprimez que la construction d'un entrepôt au Port est envisageable seulement si on construit une usine au Port :

Exprimez que la construction d'un entrepôt à Saint Pierre est envisageable seulement si on construit une usine à Saint Pierre :

Pour l'exercice suivant, vous pourrez utiliser les résultats des relaxation linéaires ci-dessous.

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1=<1,X2=<1,X1>=1},maximize(Max).
false
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3},maximize(Max).
X1 = 5 rdiv 4, X2 = 3 rdiv 2, X3 = 7 rdiv 4, X4 = 0,
Max = 57 rdiv 4 = 14,25
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1=<1,X2=<1,X1=<0},maximize(Max).
X1 = X2, X2 = 0, X3 = 2, X4 = 1 rdiv 2,
Max = 27 rdiv 2 = 13,5
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1=<1,X2>=2},maximize(Max).
X1 = 5 rdiv 6, X2 = 2, X3 = 11 rdiv 6, X4 = 0,
Max = 73 rdiv 6  ~ 12,17
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1=<1},maximize(Max).
X1 = 1, X2 = 6 rdiv 5, X3 = 9 rdiv 5, X4 = 0,
Max = 71 rdiv 5 = 14,2
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1=<1,X2=<1},maximize(Max).
X1 = 5 rdiv 6, X2 = 1, X3 = 11 rdiv 6, X4 = 0,
Max = 85 rdiv 6 ~ 14,17
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1>=2},maximize(Max).
false
```

```
?- {X1>=0,X2>=0,X3>=0,X4>=0,Max=4*X1-2*X2+7*X3-X4,X1+5*X3=<10,X1+X2-X3=<1,6*X1-5*X2=<0,
-X1+2*X3-2*X4=<3,X1=<1,X2>=2,X1=<0},maximize(Max).
X1 = 0, X2 = X3, X3 = 2, X4 = 1 rdiv 2,
Max = 19 rdiv 2 = 9,5
```

Nom :	Signature :
Prénom(s) :	

Exercice 2 (7 •) Dessinez l'arbre de recherche minimal résultant de l'application de l'algorithme de Branch&Bound MIP pour résoudre le problème d'optimisation linéaire suivant. Parmi les nœuds à développer, sélectionnez le plus prometteur pour la recherche du maximum. Si ce programme linéaire admet une solution optimale, précisez la valeur du maximum et les coordonnées d'un point où ce maximum est atteint.

$$\begin{array}{rl}
\max & 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 - x_4 \\
\text{s.c.} & x_1 + 5x_3 \leq 10 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 1 \\
& 6x_1 - 5x_2 \leq 0 \\
& -x_1 + 2x_3 - 2x_4 \leq 3 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{N},\ x_4 \in \mathbb{Q},\ x_4 \geq 0
\end{array}$$

Exercice 3 (8 •) Résolvez graphiquement le programme linéaire suivant qui comporte une inégalité stricte. Si ce programme linéaire admet une solution optimale, précisez la valeur du maximum et les coordonnées d'un point où ce maximum est atteint.

$$\begin{array}{rl} \max & x + y \\ \text{s.c.} & y - x \leq 1/2 \\ & y + (4/3)x < 4 \\ & x, y \in \mathbb{N} \end{array}$$