Résolution des systèmes linéaires

1 Description de l'ensemble des solutions

Tout d'abord, résoudre un système linéaire, ce n'est pas "trouver la solution" comme dans les petites classes : il existe des problèmes sans solution d'autres avec plusieurs solutions (trouver une paire de chaussettes dans son armoire le matin), voire une infinité de solution (trouver un entier qui soit un multiple de 2), ou encore un problème pour lequel tout le monde est solution (trouver un réel dont le carré est > -3). Il arrive parfois qu'un problème admette une unique solution, mais il faut bien comprendre que ce n'est pas la règle.

En maths, on a l'habitude de décrire les ensembles principalement de deux façons "duales" : on peut décrire un ensemble comme "l'ensemble des machins qui vérifient telle propriété", ou encore comme "l'ensemble des trucs qui ont telle forme".

EXEMPLE 1 *Le segment* $[-1, 1]$ *est naturellement défini comme l'ensemble des réels* x *qui vérifient* $-1 \leq x \leq 1$*. Cela dit, si on considère l'ensemble des réels de la forme* $\cos\theta$*, pour* θ *décrivant* $\mathbb{R}$*, on retrouve le même ensemble.* Vous sauriez le prouver ?

Résoudre un système consiste en général à partir d'une question de la forme *"Quels sont les triplets de réels* (x, y, z) *qui vérifient en même temps les trois équations ..."* et arriver à une réponse de la forme :

- Ben y'en a pas.
- Il n'y a que le triplet $(2, -15, 1024)$.
- Ce sont tous les triplets de la forme $(3 - \lambda, 2 + \lambda, 3\lambda)$, pour λ décrivant $\mathbb{R}$.

Notons que dans le troisième cas, on peut arriver à plusieurs descriptions différentes du même ensemble :

EXERCICE 1 *Montrer :*

$$\begin{aligned}\big\{(3-\lambda, 2+\lambda, 3\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\big\} &= \big\{(3-\mu, 2+\mu, 3\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(\alpha, 5-\alpha, 9-3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(5-\beta, \beta, 3\beta-6) \mid \beta \in \mathbb{R}\big\}\end{aligned}$$

Des équations bizarres Comme chacun sait, les notions de TOUJOURS et JAMAIS sont vraiment à distinguer : à la question "a-t-on $x+2 = x+2$?" on répondra "toujours" et à la question "a-t-on $x + 2 = x + 512$?" on répondra "jamais". Ainsi, un système dans lequel apparaissent les équations $L_1, L_2, ..., L_n$ et l'équation $0 = 0$ est absolument équivalent au système constitué des équations $L_1, L_2, ..., L_n$. Par contre, un système constitué des équations $L_1, L_2, ..., L_n$ et de l'équation $19 = 0$ n'admettra AUCUNE solution. Ainsi, les équations de la forme $\alpha = \beta$ où les inconnues n'interviennent pas sont à prendre avec des pincettes : il faut systématiquement réfléchir (disons les 10 premières fois) avant de les éliminer...

Existence d'une unique solution Lors d'une résolution de système, l'équivalence suivante (ou *double-implication*) $\mathcal{S} \iff \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \\ z=1 \end{cases}$ induit la conclusion : "Le système $\mathcal{S}$ admet une unique solution". Mais sauriez-vous préciser quelle implication fournit l'existence d'une solution, et laquelle fournit l'unicité ?

Remarque 1 Prenez votre temps pour répondre à la question précédente : l'expérience montre qu'une réponse trop rapide est correcte statistiquement 35% du temps. Si je pose la même question à mon chat[1], il obtient un meilleur taux de réussite (50%)...

Systèmes équivalents On va écrire ici un certain nombre d'implications du type $\mathcal{S}_1 \implies \mathcal{S}_2$, avec $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ des systèmes d'équations (parfois réduits à une seule équation). On demande de réfléchir à la validité des implications inverses $\mathcal{S}_2 \implies \mathcal{S}_1$. Parfois, on utilisera la notation L_1 (L pour ligne) pour désigner une équation. Si L_1 et L_2 sont deux équations $g_1 = d_1$ et $g_2 = d_2$, alors $\alpha L_1 + \beta L_2$ désigne naturellement l'équation $\alpha g_1 + \beta g_2 = \alpha d_1 + \beta d_2$. Il est bien clair (?) que si L_1 et L_2 sont deux équations qui sont vérifiées, alors $\alpha L_1 + \beta L_2$ l'est égalemet.
Attention, il ne s'agit pas de trouver toutes les bonnes réponses très vite : l'objectif est de réfléchir CALMEMENT et LENTEMENT dans chacun des cas...

- $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \implies 2x+y=11$
- $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x+y &= 11 \\ y &= 5 \end{cases}$
- $\begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x+y &= 11 \\ x+y &= 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \alpha L_1 + \beta L_2$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ L_2 + 17L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ L_2 + \alpha L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ \alpha L_2 + L_1 \end{cases}$
- $\begin{cases} L_1 \\ L_2 \end{cases} \implies \begin{cases} L_1 \\ \alpha L_2 + \beta L_1 \end{cases}$

2 Le principe du pivot

2.1 Systèmes triangulaires

La résolution d'un système triangulaire *à coefficients diagonaux non nuls* se fait sans problème par substitutions successives du bas vers le haut : on garde bien l'équivalence d'après le paragraphe précédent.

[1] un animal remarquable

EXEMPLE 2

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z &=& 2 \\ y-6z &=& -3 \\ z &=& 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z &=& 2 \\ y &=& 6z-3=21 \\ z &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}\big(-2y+3z+2\big)=-14 \\ y &=& 21 \\ z &=& 4 \end{array}\right.$$

et l'ensemble des solutions est réduit à un singleton : $\mathcal{S}=\{(-14,21,4)\}$.

Si le système triangulaire possède des coefficients diagonaux nuls, deux situations peuvent se produire : on peut arriver à l'incompatibilité de deux équations, ou encore à la disparition d'une équation :

EXEMPLE 3

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z &=& 2 \\ -6z &=& -3 \\ z &=& 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z &=& 2 \\ z &=& \frac{3}{6}=\frac{1}{2} \\ z &=& 4 \end{array}\right.$$

et ici ce système n'admet pas de solution : $\mathcal{S}=\emptyset$.

EXEMPLE 4

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z &=& 2 \\ 6z &=& 24 \\ z &=& 4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x+2y-3z &=& 2 \\ z &=& \frac{24}{6}=4 \\ z &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}\big(-2y+3z+2\big)=7-y \\ z &=& 4 \end{array}\right.$$

Dans ce dernier système, on voit que pour chaque valeur de y*, on peut trouver une (unique) solution de la forme* (x,y,z)*. On a donc "un degré de liberté", et on peut décrire* $\mathcal{S}$ *comme l'ensemble des triplets de la forme* $(7-y,y,4)$*, pour* y *décrivant* $\mathbb{R}$ *:*

$$\mathcal{S}=\big\{(7-y,y,4)\ \big|\ y\in\mathbb{R}\big\}.$$

Attention, lorsqu'on a un système paramétré, on peut être amené à discuter selon la valeur des paramètres, comme on le verra dans les exemples. On peut déjà donner un exemple simplissime :

EXEMPLE 5 *On fixe un réel* λ*. Résoudre le système d'inconnues* x *et* y *:* $\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 5 \\ x &=& 2 \\ y &=& \lambda \end{array}\right.$

2.2 Mise sous forme triangulaire

Décrivons ce qu'on fait pour un système $(3,3)$ d'inconnues (x,y,z) "lorsque tout se passe bien", en notant L_1, L_2 et L_3 les 3 équations en jeu.
On suppose que le coefficient en x de la première équation, disons a, est non nul. On va s'en servir

comme *pivot* pour éliminer les autres occurences de x. Si on note b et c les coefficients en x des deuxième et troisième lignes, le système constitué des équations $L_1, L_2 - \frac{b}{a}L_1$, et $L_3 - \frac{c}{a}L_1$ est alors équivalent au premier (pourquoi ?) et ne fait apparaître x que dans la première équation : en supposant que le coefficient en y de la nouvelle deuxième ligne L_2', disons d, est non nul (c'est alors le nouveau pivot) et en notant e celui de y dans la troisième nouvelle ligne L_3', le système constitué des lignes L_1, L_2' et $L_3' - \frac{e}{d}L_2'$ est équivalent au premier système et triangulaire : on est ramené à un cas qu'on sait traiter.

Lors de la première étape, on ne touche pas à la première ligne. De même, à la deuxième étape, on ne touche ni à le première ni à la deuxième ligne, etc...

EXEMPLE 6 *Dans l'exemple qui suit, on adopte une notation classique : pour dire qu'on change la seconde ligne L_2 en $L_2' = L_2 + \alpha L_1$, on préferera noter $L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1$, ce qui signifie : à partir de maintenant, ce qu'on appelle L_2, c'est ce qui désignait avant $L_2 + \alpha L_1$. Après cinq opérations de ce type, on parlera donc toujours de L_8 plutôt que de L_8''''' :*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 \\ -2x & - & y & - & 3z & = & -5 \\ 6x & + & 4y & + & 4z & = & 16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 & \\ & & y & - & 6z & = & -3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ & - & 2y & + & 13z & = & 10 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 2x & + & 2y & - & 3z & = & 2 & \\ & & y & - & 6z & = & -3 & \\ & & & & z & = & 4 & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \dots$$

Décrivons maintenant les différents problèmes qui peuvent arriver en cours de résolution d'un système $(3, 3)$, ainsi que leur solution :

- **Pas de pivot où on veut** : si à la première étape le coefficient en x de la première ligne est nul, on peut échanger la première équation avec la deuxième ou la troisième. De même, si à la seconde étape, le coefficient en y (futur pivot) est nul, on peut échanger la deuxième équation avec la troisième, MAIS PAS LA PREMIERE (se souvenir qu'on veut arriver à un système triangulaire : il ne faut pas faire réapparaitre x !).
- **Plus de pivot !** : si il n'y a pas de coefficient en x non nul (rare : x n'apparaît pas dans le système...) on peut prendre y ou z comme première variable. De même, si après la première étape, y n'apparaît ni dans la deuxième ni dans la troisième équation, on peut prendre z comme deuxième inconnue.
- **Un membre de gauche est nul** : voir plus haut : selon que le membre de droite correspondant est nul ou pas, l'équation va disparaître, ou bien rendre le système incompatible.

2.3 Résolution générale

En regardant un système linéaire à disons n équations et p inconnues $x_1, ..., x_p$, il est difficile de dire a priori si "ça va bien se passer" au sens où il existera une unique solution. A vrai dire, il est plus simple de détecter certaines situations où on est certain que ça va mal se passer : plus d'inconnues que d'équations ou le contraire, deux équations proportionnelles, etc... Le cours d'algèbre linéaire éclaircira complètement cette question plus tard dans l'année, en faisant intervenir un certain *déterminant* dont certains ont peut-être entendu parler en terminale pour les systèmes $(2, 2)$. Jusqu'à nouvel ordre, il est cependant INTERDIT d'utiliser ces mystérieux déterminants et les formules tout aussi mystérieuses qui vont avec pour résoudre un système $(2, 2)$.

On se lance donc dans une résolution de système sans savoir a priori si on va arriver à un brave singleton comme solution : on essaie de mettre sous forme triangulaire, et en cas de succès, il n'y a plus qu'à remonter le système comme vu plus haut. On peut décrire ce procédé de façon "algorithmique" (terme qui, c'est décidé, ne prendra JAMAIS de "y" en cours d'année...) : il s'agit ici d'un système à n équations et p inconnues $x_1, ..., x_p$. La première équation s'écrit $a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1$, et la dernière $a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = y_n$. En cours d'exécution de l'algorithme, L_i désigne toujours la i-ème équation (ou ligne...). Lorsqu'une équation est modifiée, les coefficients $a_{i,j}$ également.

`Pour i allant de 1 jusqu'à n-1 :`

- si tous les coefficients a_{α_β} sont nuls pour $\alpha \geq i$, le système est sous la forme recherchée : on quitte la boucle ;
- sinon, quitte à échanger eux lignes et/ou deux variables, on peut supposer que $a_{i,i} \neq 0$ (c'est le pivot), et alors pour tout $k \in [\![i+1, n]\!]$, on remplace L_k par $L_k - \dfrac{a_{k,i}}{a_{i,i}} L_i$.

(On pourrait traduire quasiment littéralement cet algorithme en de nombreux langages de programmation pour obtenir un programme qui résout effectivement les systèmes linéaires. La difficulté principale est de choisir la structure de donnée adéquate)

Si on est confronté à un des problèmes vu plus haut (pas de pivot, disparition d'équation...), les remèdes qu'on a donné nous assurent qu'on peut arriver (quitte à réordonner les inconnues) à un système **équivalent au système initial** de la forme :

$$(\mathcal{T}) \left\{ \begin{array}{cccccccccc} \alpha_1 x_1 & + & * & \cdots & \cdots & * & + & \cdots & * = b_1 \\ & & \alpha_2 x_2 & + & \cdots & * & + & \cdots & * = b_2 \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \\ & & & & & \alpha_r x_r & + & \cdots & * = b_r \\ & & & & & & & & 0 = b_{r+1} \\ & & & & & & & \cdots & \\ & & & & & & & & 0 = b_n \end{array} \right.$$

avec $\alpha_1, ..., \alpha_r$ tous non nuls[2]. Maintenant :

- s'il existe un $k > r$ telque $b_k \neq 0$, alors le système n'admet pas de solution.
- sinon ($b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$), pour chaque valeurs de $x_{r+1}, ..., x_p$, on trouve une unique solution au système en résolvant un système triangulaire (on passe $x_{r+1}, ..., x_n$ dans le membre droit). On obtient donc un ensemble de solution avec $n - r$ paramètres.

3 Quelques exemples supplémentaires

1. *Tout se passe bien*
   - $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 4 \\ x & - & 3y & = & 9 \end{array} \right.$
   - $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -4 \\ 2x & - & y & + & 2z & = & -2 \\ -3x & + & y & - & z & = & -2 \end{array} \right.$
   - $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & + & z & - & t & = & -2 \\ 2x & - & 3y & + & z & + & t & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ -x & - & y & + & 3z & + & 2t & = & -5 \end{array} \right.$
2. *Ça se complique*

[2] Au fait, sauriez-vous distinguer le concept de "tous non nuls" et celui de "non tous nuls" ?

- $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 17 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + y + 6z = 8 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -x + y + 2z + t = 2 \\ 2x + y + 3z - t = -1 \\ y + 4z - t = -3 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ -x + y + 2z + t = 2 \\ 2x + y + 3z - t = -1 \\ y + 4z - t = 4 \end{cases}$
- $\begin{cases} x + y - z - t = 2 \\ 2x + 3y + z + t = 4 \\ 3x + 5y + 3z + 3t = 6 \\ 4x + 5y - z - t = 8 \end{cases}$

3. *Il faut discuter :* dans les trois premiers exemples, α est un paramètre réel.
   - $\begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 4 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y = 3 \\ \alpha x + 2y = 6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y + z = 6 \end{cases}$
   - $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + \alpha y - z = 4 \\ x - y - z = 6 \end{cases}$
   - On considère l'application :

   $$\Phi \left\| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto & \big(x+2y-z+t, x+y+z-3t, x+3y-3z+5t\big) \end{array} \right.$$

   Déterminer les $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\Phi(x,y,z,t) = (0,0,0)$.

4. *Juste pour rire* (extrait de *"Matrices, géométrie, algèbre linéaire"* de P. Gabriel, Ed. Cassini)

   - 9 boisseaux de chanvre, 7 de froment, 3 de haricots, 2 de fèves et 5 de millet coûtent 140 pièces de monnaie ;
   - 7 boisseaux de chanvre, 6 de froment, 4 de haricots, 5 de fèves et 3 de millet coûtent 128 pièces de monnaie ;
   - 3 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 7 de haricots, 6 de fèves et 4 de millet coûtent 116 pièces de monnaie ;
   - 2 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 3 de haricots, 9 de fèves et 4 de millet coûtent 112 pièces de monnaie ;
   - 1 boisseau de chanvre, 3 de froment, 2 de haricots, 8 de fèves et 5 de millet coûtent 95 pièces de monnaie.

   Combien coûte un boisseau de chaque denrée ? *(Concours d'entrée à l'école mandarinale supérieure T'ai-hsueh de Xi'an, époque Han, 123 avant notre ère !)*