4. Programmation en nombres entiers

b. Séparation et évaluation progressive

c. Plans de coupes

Résolution de modèles entiers

- Programmation en nombres entiers = Programmation linéaire avec certaines variables à valeurs entières
- Pourquoi ne pas oublier les contraintes d'*intégralité*…
- Résoudre le modèle de PL ainsi obtenu (appelé *relaxation PL*)…
- Puis arrondir aux valeurs entières les plus près?
- Dans certains cas, ça peut fonctionner…
- Mais dans d'autres cas, cette *méthode par arrondissement* est désastreuse!

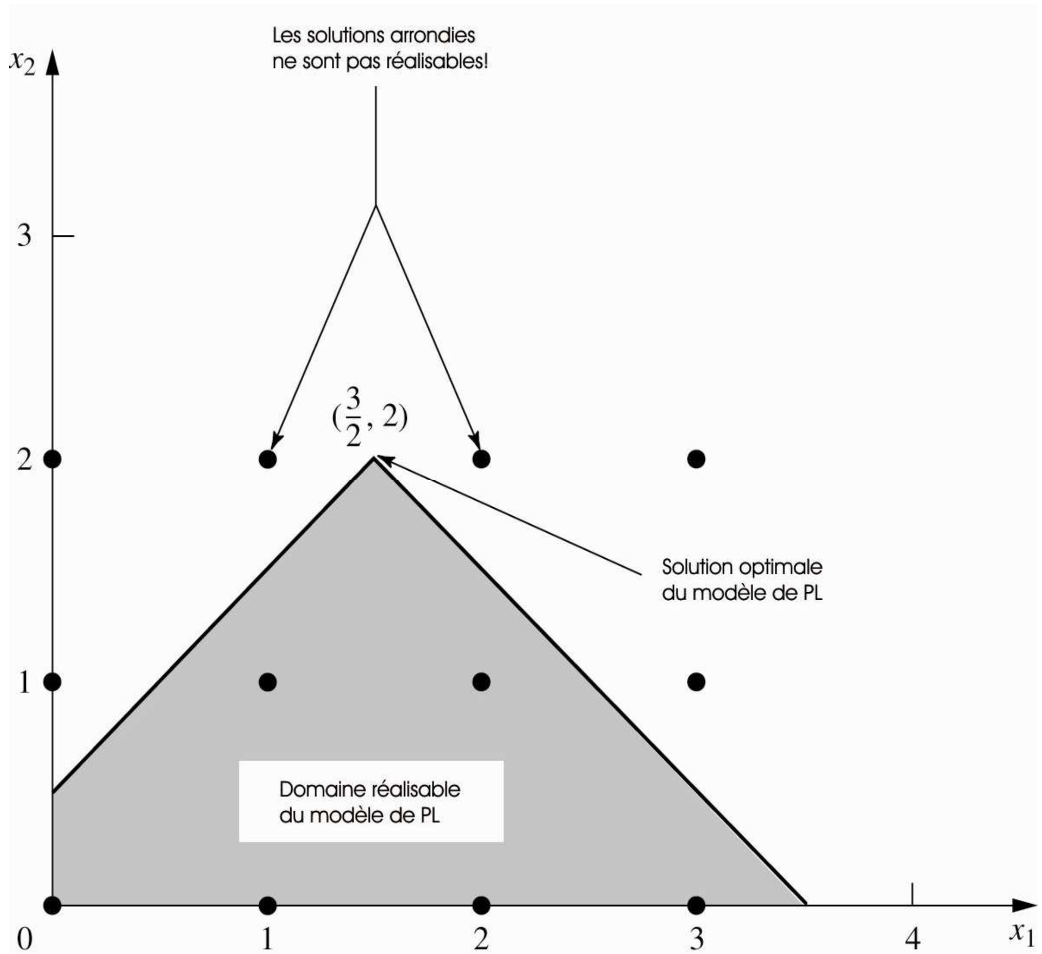
Arrondissement : exemple 1

$$\max\ Z = x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$x_1 + x_2 \leq 3\frac{1}{2}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers}$$



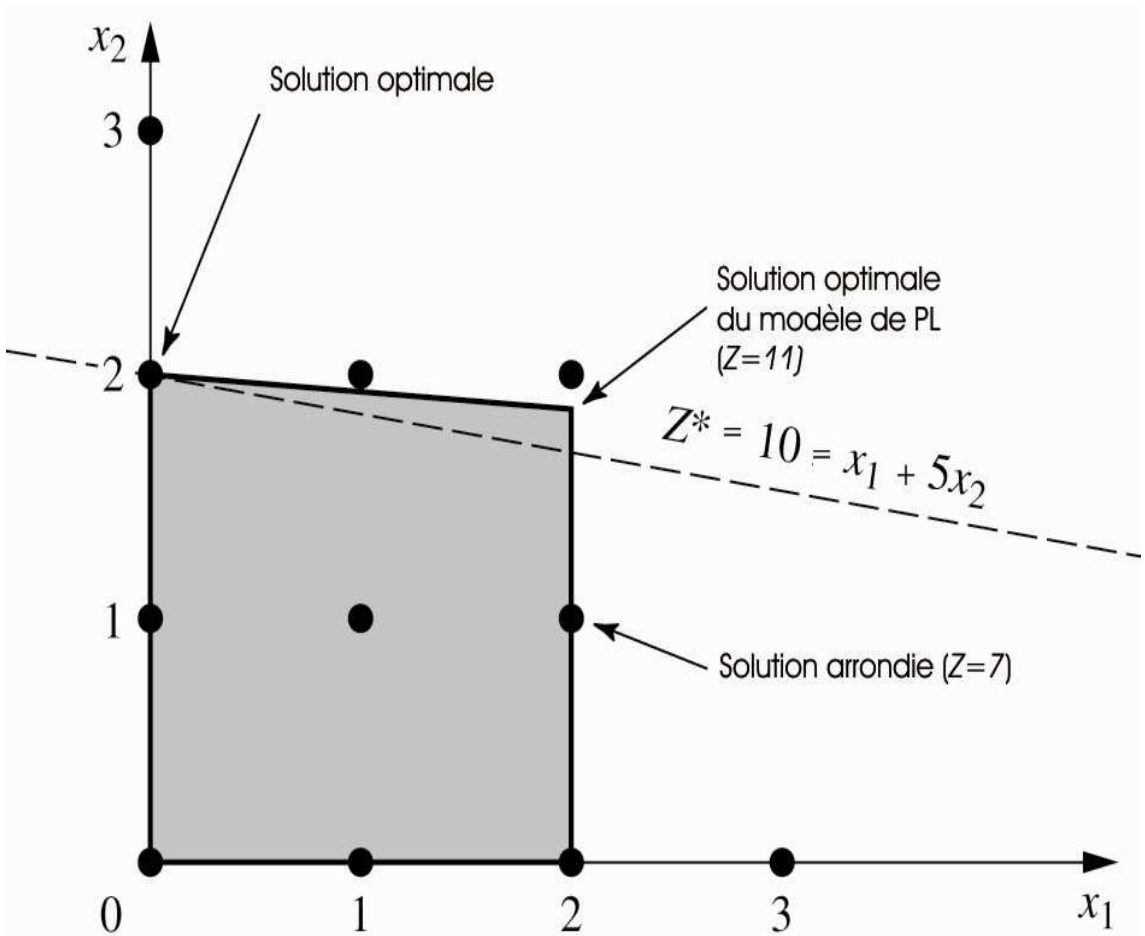
Arrondissement : exemple 2

$$\max Z = x_1 + 5x_2$$

$$x_1 + 10x_2 \leq 20$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers}$$



Approche par énumération

- Un modèle en nombres entiers *borné* (par exemple, un modèle avec uniquement des variables 0-1) possède un nombre fini de solutions
- Pourquoi ne pas les énumérer toutes?
- Déjà, pour n=20 variables 0-1, il y a plus d'un million de solutions possibles!
- Pour n=30, c'est plus d'un milliard!...
- Peut-être peut-on combiner cette idée d'énumérer les solutions avec l'idée de résoudre la relaxation PL pour éliminer certaines de ces solutions?

Construction de l'arbre des solutions

- Un algorithme simple pour énumérer toutes les solutions d'un modèle 0-1 consiste à :
  - Choisir une variable x
  - Générer les deux alternatives $x=0$ et $x=1$ (on dit que x est *fixée*) : chaque alternative correspond à un sommet de l'arbre des solutions
  - Recommencer à partir d'un sommet pour lequel certaines variables ne sont pas encore fixées
- *Racine* de l'arbre : aucune variable n'est encore fixée
- *Feuilles* de l'arbre : toutes les variables ont été fixées
- Nombre de feuilles = 2^n (pour n variables 0-1)

Algorithme de branch-and-bound

- Approche *diviser-pour-régner* :
  - Décomposition du problème en sous-problèmes plus simples
  - Puis combinaison de la résolution de ces sous-problèmes pour obtenir la solution du problème original
- Dans l'algorithme de *branch-and-bound (B&B)*, chaque sous-problème correspond à un sommet dans l'arbre des solutions
- On résout la relaxation PL de chaque sous-problème
- L'information tirée de la relaxation PL nous permettra (peut-être) d'éliminer toutes les solutions pouvant être obtenues à partir de ce sommet

Algorithme de B&B : cas 0-1

- *Branchement* (ou séparation) :
  - Choisir un sommet dans l'arbre des solutions
  - Puis choisir une variable non encore fixée relativement à ce sommet
  - Générer les deux alternatives
- *Calcul de borne* (ou évaluation) : résoudre la relaxation PL en chaque sommet
- *Élagage* (ou élimination) : utiliser l'information tirée de la résolution de la relaxation PL pour éliminer toutes les solutions émanant du sommet courant
- B&B = *séparation et évaluation progressive*

Algorithme de B&B : exemple

- Reprenons le problème *California Mfg*

$$
\begin{array}{lrrrrcl}
\max \quad Z = & 9x_1 & +5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & \\
 & 6x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 10 \\
 & & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & +x_3 & & \leq & 0 \\
 & & -x_2 & & +x_4 & \leq & 0 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & \text{binaire}
\end{array}
$$

- Relaxation PL : les variables peuvent prendre des valeurs fractionnaires entre 0 et 1
- Solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5/6, 1, 0, 1)$ et $Z = 33/2$
- Branchons sur la variable x_1

Exemple : calcul de borne

- Sous-problème 1 : $x_1 = 0$

$$
\begin{array}{llrrrll}
\max & Z_1 = & 5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & \\
 & & 3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 10 \\
 & & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\
 & & & +x_3 & & \leq & 0 \\
 & & -x_2 & & +x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_2, & x_3, & x_4 & & \text{binaire}
\end{array}
$$

- Solution de la relaxation PL :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0,1,0,1) \text{ et } Z = 9$$

Exemple : calcul de borne

- Sous-problème 2 : $x_1 = 1$

$$
\begin{array}{lllllll}
\max & Z_2 = & 5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & +9 \\
 & & 3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 4 \\
 & & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\
 & & & +x_3 & & \leq & 1 \\
 & & -x_2 & & +x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_2, & x_3, & x_4 & & \text{binaire}
\end{array}
$$

- Solution de la relaxation PL :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 4/5, 0, 4/5) \text{ et } Z = 16\frac{1}{5}$$

Exemple : calcul de borne

- Sous-problème 1 : $Z_1 \leq 9$
- Sous-problème 2 : $Z_2 \leq 16 + 1/5$
- Notons que toutes les variables sont binaires et tous les paramètres dans l'objectif sont des valeurs entières
- Borne supérieure pour le sous-problème 2 : 16
- Pour le sous-problème 1, la solution obtenue est entière : c'est la *meilleure solution courante*
- On sait que la valeur optimale cherchée, Z, sera au moins $Z^* = 9$: $Z \geq Z^*$

Exemple : élagage

- Sous-problème 1 :
  - La solution optimale de la relaxation PL est entière
  - Il ne sert donc à rien de brancher sur les autres variables, puisque toutes les autres solutions entières (avec $x_1 = 0$) sont nécessairement de valeur ≤ 9!
  - On peut donc élaguer ce sommet (couper la branche!)
- Sous-problème 2 :
  - La solution optimale de la relaxation PL n'est pas entière
  - $Z^* = 9 \leq Z \leq 16$: la branche ($x_1 = 1$) peut encore contenir une solution optimale
  - Mais si on avait eu $Z_2 \leq Z^*$, on aurait pu conclure que la branche ne pouvait améliorer la meilleure solution courante

Critères d'élagage

- Un sous-problème est élagué si une des trois conditions suivantes est satisfaite :
  - *Test 1* : Sa borne supérieure (valeur optimale de la relaxation PL) est $\leq Z^*$ (valeur de la meilleure solution courante)
  - *Test 2* : Sa relaxation PL n'a pas de solution réalisable
  - *Test 3* : La solution optimale de sa relaxation PL est entière
- Lorsque le test 3 est vérifié :
  - On teste si la valeur optimale de la relaxation PL du sous-problème, Z_i, est supérieure à Z^*
  - Si $Z_i > Z^*$, alors $Z^* = Z_i$, et on conserve la solution, qui devient la meilleure solution courante

Algorithme de B&B : résumé

1. Initialisation :
   a. Poser $Z^* = -\infty$
   b. Appliquer le calcul de borne et les critères d'élagage à la racine (aucune variable fixée)
2. Critère d'arrêt : s'il n'y a plus de sous-problèmes non élagués, arrêter
3. Branchement :
   a. Parmi les sous-problèmes non encore élagués, choisir celui qui a été *créé le plus récemment* (s'il y a égalité, choisir celui de plus grande borne supérieure)
   b. Appliquer le Test 1 : si le sous-problème est élagué, retourner en 2.
   c. Brancher sur la prochaine variable non fixée

Algorithme de B&B : résumé (suite)

4. Calcul de borne :
   a. Résoudre la relaxation PL de chaque sous-problème
   b. Arrondir la valeur optimale si tous les paramètres de l'objectif sont entiers
5. Élagage : élaguer un sous-problème si
   a. La borne supérieure est $\leq Z^*$
   b. La relaxation PL n'a pas de solution réalisable
   c. La solution optimale de la relaxation PL est entière : si la borne supérieure est $> Z^*$, Z^* est mise à jour et la solution de la relaxation PL devient la meilleure solution courante
6. Retourner en 2.

Règle de sélection

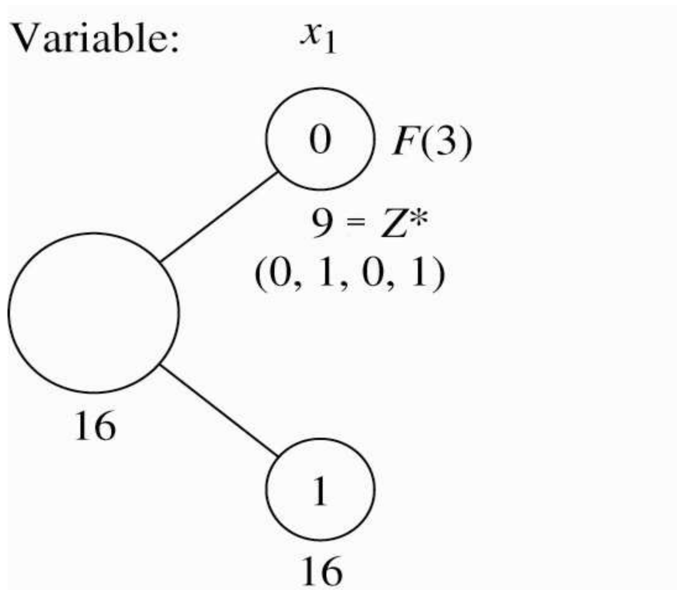
- Dans cette version, on propose comme *règle de sélection* de choisir le sous-problème le plus récemment créé
- Avantage : facilite la *réoptimisation* lors du calcul de borne, car peu de changements apportés par rapport au dernier sous-problème traité
- Désavantage : peut créer un grand nombre de sous-problèmes
- Autre option : *règle de la meilleure borne* (choisir le sous-problème ayant la plus grande borne supérieure)

Règle de branchement

- Dans cette version, la règle de branchement consiste à choisir la prochaine variable non fixée
- Il est souvent plus intéressant de choisir une variable à *valeur fractionnaire*
- En branchant sur une telle variable, il est certain que les deux sous-problèmes créés mènent à des solutions différentes de la solution courante
- De nombreux critères existent pour choisir une telle variable de façon à orienter la recherche vers un élagage rapide

Exemple (suite)

- Jusqu'à maintenant, voici l'arbre obtenu :



- F(3) indique que le sous-problème a été élagué (*fathomed*) en raison du Test 3

Exemple (suite)

- Sélection : on choisit le sous-problème 2, le seul qui n'a pas encore été élagué
- On branche sur la prochaine variable, soit x_2
- Deux nouveaux sous-problèmes sont créés :
  - Sous-problème 3 : $x_1 = 1, x_2 = 0$
  - Sous-problème 4 : $x_1 = 1, x_2 = 1$

Exemple (suite)

- Sous-problème 3 : $x_1 = 1,\ x_2 = 0$

$$
\begin{array}{llrrcr}
\max & Z_3 = & 6x_3 & +4x_4 & & +9 \\
 & & 5x_3 & +2x_4 & \leq & 4 \\
 & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\
 & & x_3 & & \leq & 1 \\
 & & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_3, & x_4 & & \text{binaire}
\end{array}
$$

- Solution de la relaxation PL :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1{,}0{,}4/5{,}0) \text{ et } Z = 13\frac{4}{5} : Z_3 \leq 13$$

Exemple (suite)

- Sous-problème 4 : $x_1 = 1,\ x_2 = 1$

$$
\begin{array}{llllll}
\max & Z_4 = & 6x_3 & +4x_4 & & +14 \\
 & & 5x_3 & +2x_4 & \le & 1 \\
 & & x_3 & +x_4 & \le & 1 \\
 & & x_3 & & \le & 1 \\
 & & & x_4 & \le & 1 \\
 & & x_3, & x_4 & & \text{binaire}
\end{array}
$$

- Solution de la relaxation PL :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,1/2) \text{ et } Z = 16 : Z_4 \le 16$$

Exemple (suite)

- Aucun des tests d'élagage ne s'applique sur ces sous-problèmes
- On doit donc choisir un des deux sous-problèmes pour effectuer un branchement, puisque ce sont ceux créés le plus récemment
- On choisit celui de plus grande borne supérieure, soit le sous-problème 4
- On branche sur x_3 et on génère deux nouveaux sous-problèmes

Exemple (suite)

- Sous-problème 5 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$

$$
\begin{array}{llll}
\max & Z_5 = & 4x_4 & \quad +14 \\
 & & 2x_4 & \leq \quad 1 \\
 & & x_4 & \leq \quad 1 \\
 & & x_4 & \leq \quad 1 \\
 & & x_4 & \quad \text{binaire}
\end{array}
$$

- Solution de la relaxation PL :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,1/2) \text{ et } Z = 16 : Z_5 \leq 16$$

Exemple (suite)

- Sous-problème 6 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

$$
\begin{array}{llrcr}
\max & Z_5 = & 4x_4 & & +20 \\
 & & 2x_4 & \leq & -4 \\
 & & x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_4 & \leq & 1 \\
 & & x_4 & & \text{binaire}
\end{array}
$$

- La relaxation PL n'a pas de solution réalisable : ce sous-problème est élagué

Exemple (suite)

- Le sous-problème 5 ne peut pas être élagué
- Il est créé le plus récemment parmi les sous-problèmes non élagués (3 et 5), on le choisit pour effectuer un branchement
- On branche sur x_4 et on génère :
  - Sous-problème 7 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$
  - Sous-problème 8 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$
- Toutes les variables sont fixées : on peut résoudre directement ces sous-problèmes

Exemple (suite)

- Sous-problème 7 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$
  - Solution : $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,0)$ et $Z_7 = 14$
  - La solution est entière : le sous-problème est élagué par le Test 3
  - Puisque $Z_7 > Z^*$, $Z^* = 14$ et la solution du sous-problème devient la meilleure solution courante
- Sous-problème 8 : $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$
  - Cette solution n'est pas réalisable, car la première contrainte ($2x_4 \leq 1$) est violée
  - Le sous-problème est élagué par le Test 2

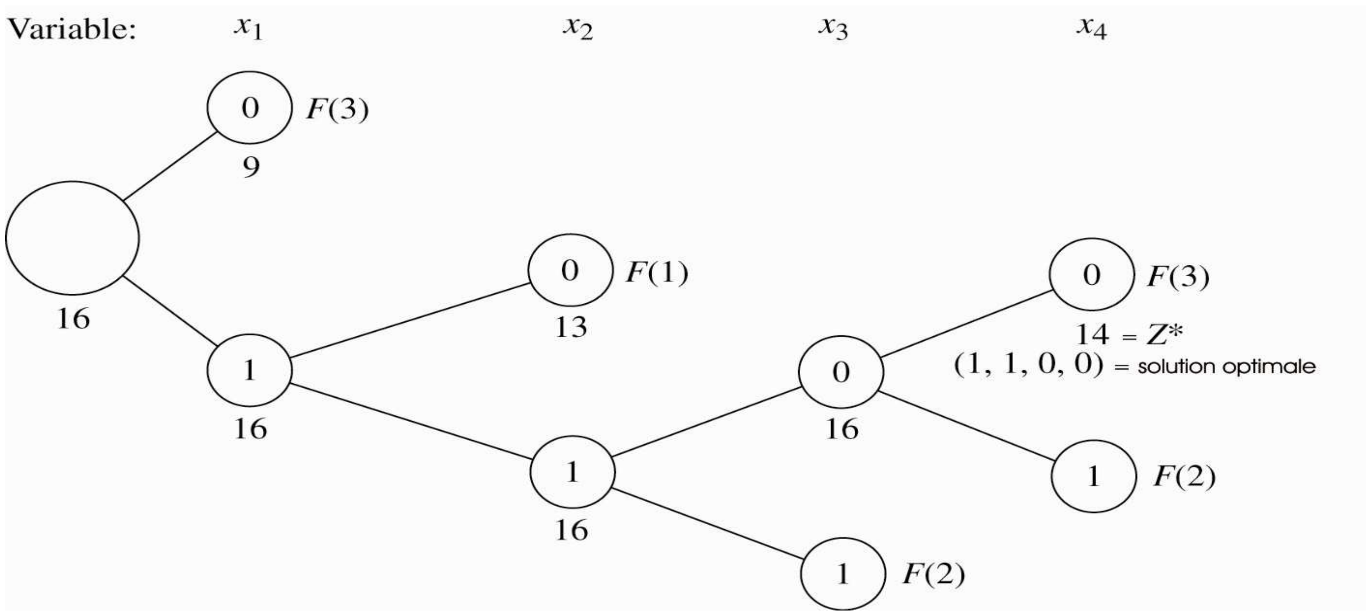
Exemple (suite)

- Le sous-problème 3 est le seul non encore élagué
- On applique le Test 1 : $Z_3 = 13 \leq 14 = Z^*$
- Le sous-problème est donc élagué
- Il n'y a plus de sous-problèmes non élagués : on arrête
- La solution optimale est :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1,1,0,0) \text{ et } Z = Z^* = 14$$

Exemple (suite et fin)

- Voici l'arbre obtenu suite à l'exécution de l'algorithme



- F(j) : le sous-problème est élagué par le Test j
- Voir autre exemple dans IOR Tutor

Algorithme de B&B : cas général

- Cas général d'un modèle de programmation (mixte) en nombres entiers : variables entières générales et variables continues
- On modifie le branchement ainsi :
  - On choisit la première variable entière à *valeur non entière*
  - Soit x_j cette variable de valeur x_j^*
  - Soit $\lfloor x_j^* \rfloor = \text{plus grand entier} \leq x_j^*$
  - On génère deux nouveaux sous-problèmes :

$$x_j \leq \lfloor x_j^* \rfloor \text{ et } x_j \geq \lfloor x_j^* \rfloor + 1$$

Algorithme de B&B : cas général

1. Initialisation :
   a. Poser $Z^* = -\infty$
   b. Appliquer le calcul de borne et les critères d'élagage à la racine (aucune variable fixée)
2. Critère d'arrêt : s'il n'y a plus de sous-problèmes non élagués, arrêter
3. Branchement :
   a. Parmi les sous-problèmes non encore élagués, choisir celui qui a été *créé le plus récemment* (s'il y a égalité, choisir celui de plus grande borne supérieure)
   b. Appliquer le Test 1 : si le sous-problème est élagué, retourner en 2.
   c. Brancher sur la prochaine variable entière à valeur non entière dans la relaxation PL

Algorithme de B&B (suite)

4. Calcul de borne : résoudre la relaxation PL de chaque sous-problème
5. Élagage : élaguer un sous-problème si
   a. La borne supérieure est $\leq Z^*$
   b. La relaxation PL n'a pas de solution réalisable
   c. Dans la solution optimale de la relaxation PL, toutes les variables entières sont à valeurs entières : si la borne supérieure est $> Z^*$, Z^* est mise à jour et la solution de la relaxation PL devient la meilleure solution courante
6. Retourner en 2.

Algorithme de B&B : exemple

$$
\begin{array}{llccccccc}
\max & Z = & 4x_1 & -2x_2 & +7x_3 & -x_4 & & \\
 & & x_1 & & +5x_3 & & \leq & 10 \\
 & & x_1 & +x_2 & -x_3 & & \leq & 1 \\
 & & 6x_1 & -5x_2 & & & \leq & 0 \\
 & & -x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & \leq & 3 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3 & & & \text{entier}
\end{array}
$$

- Faire cet exemple avec IOR Tutorial

Méthode de coupes

- Idée : ajouter des contraintes redondantes pour le modèle en nombres entiers, mais non pour la relaxation PL
- Exemple :

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

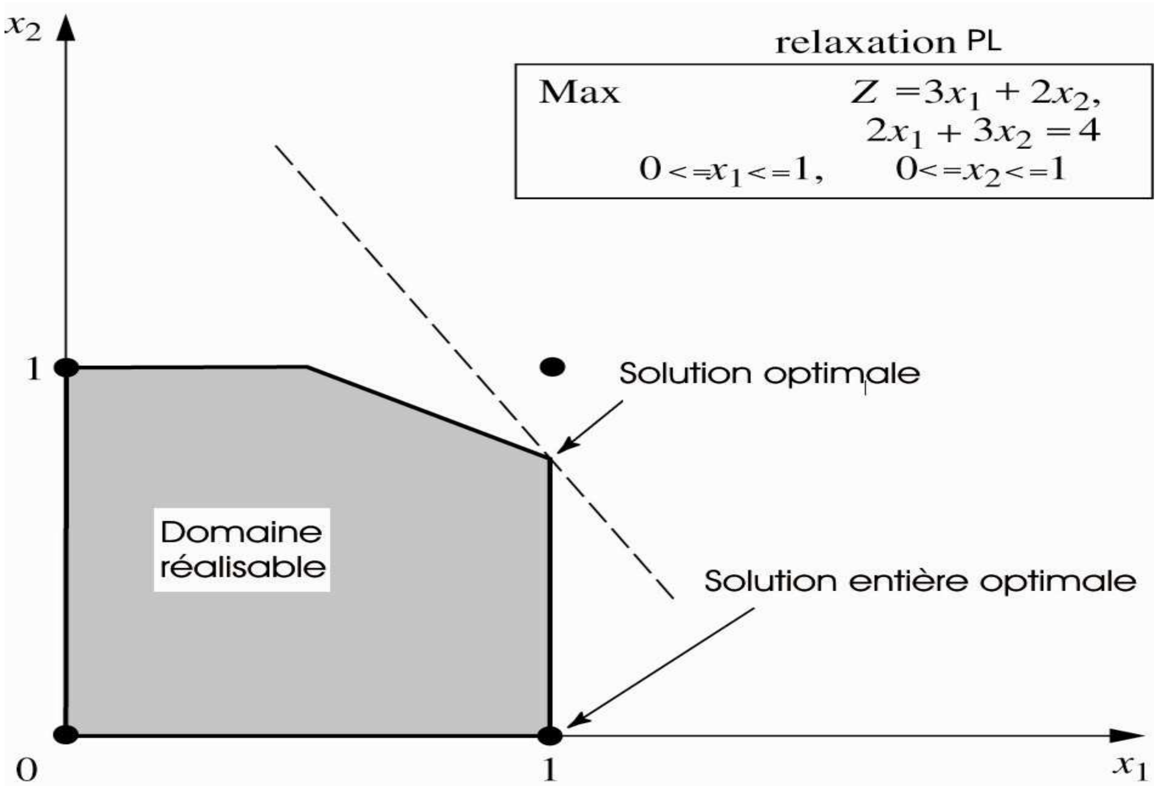
$$2x_1 + 3x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \text{ binaire}$$

- Les solutions réalisables sont (0,0), (1,0) et (0,1)
- Une contrainte redondante est : $x_1 + x_2 \leq 1$

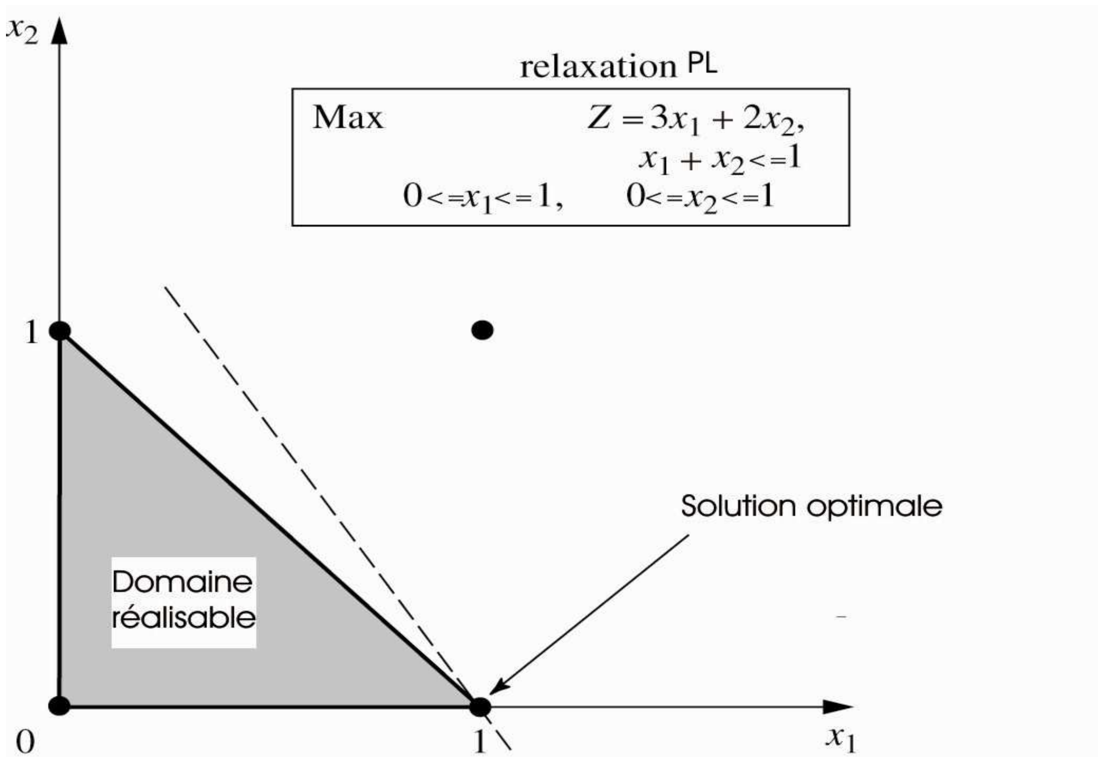
Méthode de coupes : exemple

- Domaine réalisable de la relaxation PL :



Méthode de coupes : exemple

- Suite à l'ajout de la contrainte redondante, le problème est résolu à la racine!



Méthode de coupes

- Il y a plusieurs algorithmes permettant de générer de telles inégalités redondantes, appelées *coupes*
- Mais il est rare que leur ajout permet de résoudre le problème à la racine
- L'ajout de coupes permet toutefois de réduire le nombre de sous-problèmes traités par l'algorithme de B&B
- On peut même ajouter des coupes pour chaque sous-problème (pas seulement à la racine) : on obtient alors un algorithme de branch-and-cut

Pour expérimenter avec B&B

- Pour des petits modèles (moins de 5 variables de *tous types* et moins de 5 contraintes fonctionnelles) : essayer le IOR Tutorial
- Pour des modèles plus gros, modéliser et résoudre avec *Excel Solver*
- Revoir le cas *California Mfg*
- Pour des modèles encore plus gros, essayer Lindo/Lingo et CPLEX/MPL (CD)