IFT1575 Modèles de recherche opérationnelle (RO)

4. Programmation en nombres entiers

a. Modélisation

Terminologie de base

- Programmation en nombres entiers = Programmation linéaire avec certaines variables contraintes à prendre des valeurs entières
- Programmation *non linéaire* en nombres entiers = Programmation non linéaire (sec. 7) avec certaines variables entières
- Programmation *pure* en nombres entiers = toutes les variables sont entières
- Programmation (*mixte*) en nombres entiers = certaines variables sont entières
- Programmation 0-1 (binaire) = les variables entières sont à valeurs 0 ou 1 (binaires)

Exemple : *California Mfg* (H&L, 11.1)

- Choisir de nouveaux emplacements pour construire des usines et des entrepôts
- Deux emplacements : LA et SF
- On ne peut construire un entrepôt que dans une ville où l'on a aussi une usine
- On ne peut construire plus d'un entrepôt
- On associe à chaque construction (d'une usine ou d'un entrepôt dans chacun des lieux envisagés)
  - Sa valeur estimée
  - Son coût de construction
- Objectif : maximiser la valeur totale estimée, en ne dépassant pas une limite maximum sur les coûts

Exemple (suite)

	Valeur estimée (millions $)	Coût de construction (millions $)
1. Usine à LA	9	6
2. Usine à SF	5	3
3. Entrepôt à LA	6	5
4. Entrepôt à SF	4	2
Limite maximum	-	10

Modèle *California Mfg*

- Variables :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la décision } j \text{ est approuvée } (oui) \\ 0 & \text{si la décision } j \text{ n'est pas approuvée } (non) \end{cases}$$

- Objectif : maximiser la valeur estimée totale

$$\max\ Z = 9x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

- Contraintes fonctionnelles
  - Limite maximum sur les coûts de construction

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 10$$

  - On ne peut construire plus d'un entrepôt

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

Modèle *California Mfg* (suite)

- Contraintes fonctionnelles (suite)
  - Entrepôt à LA seulement si usine à LA

$$x_3 \leq x_1$$

  - Entrepôt à SF seulement si usine à SF

$$x_4 \leq x_2$$

- Contraintes 0-1 (intégralité)

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4$$

- Ou encore

$$0 \leq x_j \leq 1 \text{ et } x_j \text{ entier}, \quad j = 1,2,3,4$$

Modèle *California Mfg* : résumé

$$
\begin{array}{llrrrrcr}
\max & Z = & 9x_1 & +5x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & \\
 & & 6x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +2x_4 & \leq & 10 \\
 & & & & x_3 & +x_4 & \leq & 1 \\
 & & -x_1 & & +x_3 & & \leq & 0 \\
 & & & -x_2 & & +x_4 & \leq & 0 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \leq & 1 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq & 0 \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & & \text{entier}
\end{array}
$$

Modélisation avec Excel

- On applique la même approche que pour la PL
- Excel Solver permet deux types de contraintes particulières pour modéliser les variables entières :
  - bin : pour représenter les variables 0-1
  - ent : pour représenter les variables entières *générales*
- Excel Solver résout les modèles de programmation en nombres entiers par l'algorithme de branch-and-bound (voir plus loin)
- Voir l'exemple *California Mfg*

Utilisation des variables binaires

- Le modèle illustre deux cas classiques d'utilisation des variables binaires
  - *Alternatives mutuellement exclusives* : on ne peut construire plus d'un entrepôt

$$x_3 + x_4 \leq 1$$

  - *Décisions contingentes* : on ne peut construire un entrepôt que là ou on a construit une usine

$$x_3 \leq x_1$$

$$x_4 \leq x_2$$

- Voyons d'autres exemples utilisant des variables 0-1

Contraintes mutuellement exclusives

- Prenons l'exemple de deux contraintes
- L'une ou l'autre des deux contraintes doit être satisfaite, mais pas les deux simultanément!

$$\text{soit } 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$\text{soit } x_1 + 4x_2 \leq 16$$

- Soit M un très grand nombre; le système précédent est équivalent à

$$\text{soit } 3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16 + M$$

$$\text{soit } 3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16$$

Contraintes mutuellement exclusives

- En introduisant une variable binaire *y*, on obtient un système équivalent

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 + M(1 - y)$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 16 + My$$

- La signification de cette variable est :
  - *y = 1*, si la première contrainte est satisfaite
  - *y= 0*, si la deuxième contrainte est satisfaite
- C'est un autre exemple d'alternatives mutuellement exclusives

Contraintes mutuellement exclusives

- On aurait pu aussi introduire deux variables binaires
  - $y_1 = 1$, si la première contrainte est satisfaite
  - $y_2 = 1$, si la deuxième contrainte est satisfaite
- On doit avoir $y_1 + y_2 = 1$
- Pour se ramener au modèle précédent, il suffit de poser $y_1 = y$ et $y_2 = 1\text{-}y$
- C'est un cas particulier de la situation suivante : K parmi N contraintes doivent être satisfaites
- Dans ce cas plus général, on introduit N variables binaires

K contraintes parmi *N*

- Soit les *N* contraintes :

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_j, \quad j = 1,2,\ldots,N$$

- On introduit alors *N* variables binaires : $y_j = 1$, si la j$^{\text{ème}}$ contrainte est satisfaite

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le d_j + M(1 - y_j), \quad j = 1,2,\ldots,N$$

- Il reste à spécifier que seulement *K* de ces contraintes peuvent être satisfaites :

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = K$$

Fonction ayant *N* valeurs possibles

- Soit la contrainte :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = d_1 \text{ ou } d_2 \text{ ou} \ldots \text{ ou } d_N$$

- On introduit alors N variables binaires : $y_j = 1$, si la fonction vaut d_j
- La contrainte s'écrit alors ainsi :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{N} d_j y_j$$

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = 1$$

Fonction ayant *N* valeurs possibles

- Exemple *Wyndor Glass*
- Supposons que le temps de production maximum à l'usine 3 n'est pas toujours 18h, mais pourrait être également 6h ou 12h
- Cette contrainte s'écrit alors :

$$3x_1 + 2x_2 = 6 \text{ ou } 12 \text{ ou } \ldots \text{ ou } 18$$

- On introduit alors 3 variables binaires :

$$3x_1 + 2x_2 = 6y_1 + 12y_2 + 18y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

Objectif avec coûts fixes

- Supposons que le coût associé à un produit j est composé de deux parties :
  - Un coût fixe initial k_j encouru dès qu'une unité de j est produite
  - Un coût c_j proportionnel au nombre d'unités de j produites
- Le coût total associé à la production de x_j unités est:

$$f_j(x_j) = \begin{cases} k_j + c_j x_j & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$$

Objectif avec coûts fixes

- Supposons que l'objectif consiste à minimiser la somme de *n* fonctions avec coûts fixes :

$$\min \; Z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$$

- On introduit alors *n* variables binaires :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$$

- L'objectif s'écrit alors ainsi :

$$\min \; Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + k_j y_j)$$

Objectif avec coûts fixes

- Mais comment représenter la relation entre x_j et y_j ?
- Les valeurs de y_j et de x_j dépendent l'une de l'autre : il s'agit d'un exemple de *décisions contingentes*
- On doit donc avoir une contrainte qui précise que x_j vaut 0 si $y_j = 0$
- Mais contrairement à la situation dans notre exemple *California Mfg*, les deux variables ne sont pas binaires: x_j peut être quelconque
- Que faire ?...

Objectif avec coûts fixes

- Soit M_j une borne supérieure sur la valeur de x_j
- On écrit la relation entre les deux variables ainsi :

$$x_j \leq M_j y_j$$

- Alors :
  - Si $y_j = 0$, alors $x_j = 0$
  - Si $y_j = 1$, alors $x_j \leq M_j$
  - Si $x_j > 0$, alors $y_j = 1$
  - Si $x_j = 0$, alors toute solution optimale satisfait $y_j = 0$ lorsque $k_j > 0$ (si $k_j = 0$, la variable y_j est inutile)

Objectif avec coûts fixes

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + k_j y_j)$$

Les contraintes originales du problème

$$x_j \leq M_j y_j$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,\ldots, n$$

Variables entières en variables 0-1

- Soit *x* une variable entière générale bornée :

$$0 \leq x \leq u$$

- Soit *N* l'entier tel que $2^N \leq u < 2^{N+1}$
- La représentation binaire de *x* est

$$x = \sum_{j=0}^{N} 2^j y_j$$

- Intérêt de cette transformation : les méthodes de programmation 0-1 souvent plus efficaces que les méthodes de programmation en nombres entiers
- Mais… augmentation du nombre de variables!

Exemple 1

- Trois types de produits
- Deux usines
- Profit/unité de produit (1000 $)
- Ventes potentielles par produit (unités/semaine)
- Capacité de production par usine (h/semaine)
- *Pas plus de deux produits peuvent être fabriqués*
- *Une seule des deux usines doit être exploitée*

Exemple 1 (suite)

	Produit 1 tps production (h/unité)	Produit 2 tps production (h/unité)	Produit 3 tps production (h/unité)	Capacité de production (h/semaine)
Usine 1	3	4	2	30
Usine 2	4	6	2	40
Profit/unité (1000 $)	5	7	3	
Ventes potentielles (/semaine)	7	5	9	

Exemple 1 (suite)

- Variables :

  $x_j =$ nombre d'unités fabriquées du produit j

- Pour représenter la contrainte « Pas plus de deux produits », on doit introduire des variables 0-1 :

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_j > 0 \\ 0 & \text{si } x_j = 0 \end{cases}$$

- Pour représenter la contrainte « Une seule des deux usines », on doit ajouter une variable 0-1 :

$$y_4 = \begin{cases} 1 & \text{si l'usine 1 est choisie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exemple 1 (suite)

- Objectif :

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

- Ventes potentielles :

$$x_1 \leq 7, x_2 \leq 5, x_3 \leq 9$$

- Pas plus de deux produits :

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

- Relation entre variables continues et variables 0-1 :

$$x_1 \leq 7y_1, x_2 \leq 5y_2, x_3 \leq 9y_3$$

Exemple 1 (suite)

- Une seule des deux usines :

$$\text{soit } 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$$

$$\text{soit } 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40$$

- En utilisant la variable 0-1 (et M très grand) :

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 + M(1 - y_4)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 + My_4$$

Exemple 1 : résumé

$$\max Z = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

$$x_1 \leq 7y_1, x_2 \leq 5y_2, x_3 \leq 9y_3$$

$$y_1 + y_2 + y_3 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30 + M(1 - y_4)$$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40 + My_4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j = 1,2,3,4$$

Exemple 2

- Trois types de produits
- Cinq annonces publicitaires
- Maximum de trois annonces/produit

Nombre d'annonces	Produit 1 profit, millions $	Produit 2 profit, millions $	Produit 3 profit, millions $
0	0	0	0
1	1	0	-1
2	3	2	2
3	3	3	4

Exemple 2 : premier modèle ?

- Variables :

  $x_i =$ nombre d'annonces du produit *i*
- L'hypothèse de proportionnalité est violée!
- On ne peut représenter l'objectif sous forme linéaire uniquement avec ces variables!
- Nous verrons deux modèles possibles pour contourner cette difficulté

Exemple 2 : premier modèle

- Variables :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Objectif :

$$\max Z = y_{11} + 3y_{12} + 3y_{13} + 2y_{22} + 3y_{23} - y_{31} + 2y_{32} + 4y_{33}$$

- Exactement cinq annonces

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} j y_{ij} = 5$$

- Définition des variables 0-1

$$\sum_{j=1}^{3} y_{ij} \le 1, \quad i = 1,2,3$$

Exemple 2 : deuxième modèle

- Variables :

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Cette définition implique :

$$x_i = 0 \Rightarrow y_{i1} = 0, y_{i2} = 0, y_{i3} = 0$$

$$x_i = 1 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 0, y_{i3} = 0$$

$$x_i = 2 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 1, y_{i3} = 0$$

$$x_i = 3 \Rightarrow y_{i1} = 1, y_{i2} = 1, y_{i3} = 1$$

- Ou encore : $y_{i(j+1)} \leq y_{ij}, i = 1,2,3, \ j = 1,2$

Exemple 2 : deuxième modèle (suite)

- Supposons que $x_1 = 3$ (3 annonces pour le produit 1)
- Le profit associé à cette valeur doit être 3
- Mais $x_1 = 3$ veut dire que chaque variable binaire associée au produit 1 vaut 1
- Comment comptabiliser correctement la contribution de ces trois variables au profit ?
- Solution : le profit associé à la variable y_{ij} est $c_{ij+1}-c_{ij}$
- Dans notre exemple, le profit associé à
  - y_{11} est 1-0 = 1
  - y_{12} est 3-1 = 2
  - y_{13} est 3-3 = 0

Exemple 2 : deuxième modèle (suite)

- Objectif :

$$\max Z = y_{11} + 2y_{12} + 2y_{22} + y_{23} - y_{31} + 3y_{32} + 2y_{33}$$

- Exactement cinq annonces

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} y_{ij} = 5$$

- Définition des variables 0-1

$$y_{i(j+1)} \leq y_{ij}, i = 1,2,3, j = 1,2$$

Exemple 3

- Une compagnie aérienne veut affecter trois équipages à des séquences de vols
- Il y a un coût associé à chaque séquence de vols
- La compagnie cherche à minimiser les coûts d'affectation des équipages aux séquences de façon à assurer le service sur chacun de ses vols
- Exemple : 11 vols et 12 séquences de vols

Exemple 3 (suite)

Vol	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1			1			1			1		
2		1			1			1			1	
3			1			1			1			1
4				1			1		1	1		1
5	1					1				1	1	
6				1	1				1			
7							1	1		1	1	1
8		1		1	1				1			
9					1			1			1	
10			1				1	1				1
11						1			1	1	1	1
Coût	2	3	4	6	7	5	7	8	9	9	8	9

Exemple 3 (suite)

- Variables :

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si la séquence de vols } j \text{ est affectée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Objectif :

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 7x_5 + 5x_6$$
$$7x_7 + 8x_8 + 9x_9 + 9x_{10} + 8x_{11} + 9x_{12}$$

- Affecter trois équipages

$$\sum_{j=1}^{12} x_j = 3$$

Exemple 3 (suite)

- Le service doit être assuré sur chacun des vols :

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_{10} \geq 1$$

$$x_2 + x_5 + x_8 + x_{11} \geq 1$$

$$x_3 + x_6 + x_9 + x_{12} \geq 1$$

$$x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} + x_{12} \geq 1$$

- … Et ainsi de suite (voir détails dans H&L, sec. 11.4)

Exemple 3 (suite)

- C'est un exemple de problème de *recouvrement d'ensemble*
  - I : un ensemble d'objets (ici, les vols)
  - J : une collection de sous-ensembles de I (ici, les séquences de vols)
  - $J_i, i \in I$: les sous-ensembles dans J qui contiennent i
- Variables

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{si le sous-ensemble } j \text{ est choisi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Contraintes : $\sum_{j \in Ji} x_j \geq 1, i \in I$
- *Partitionnement d'ensemble* : $\sum_{j \in Ji} x_j = 1, i \in I$