Test de faisabilité

- Pour trouver un minimum, il faut que le polyèdre :

  $$\mathcal{P} = \{x \mid ax = b \geqslant 0\}$$

  soit non vide, ou encore qu'il existe au moins un point x_0 qui satisfasse toute les inégalités $Ax + b \geqslant 0$.
- On peut vérifier cette condition à l'aide de l'algorithme d'élimination de Fourier-Motzkin.
- Notations : $x^{(n)}$ le vecteur x amputé de ses n premières composantes. $x^{(0)} = x$.
- $A^{(n)}x^{(n)} + b^{(n)} \geqslant 0$ le système obtenu après l'élimination de n variables.

Test de Fourier-Motzkin I / II

- Soit à éliminer x_1. On réparti les contraintes en trois classes :
  - $k \in I_0$ ssi $a_{k1} = 0$.
  - $k \in I_+$ ssi $a_{k1} > 0$.
  - $k \in I_-$ ssi $a_{k1} < 0$.
- Dans une contrainte de I_0, l'inconnue x_1 est déjà éliminée.

Test de Fourier-Motzkin II / II

- Une contrainte $k \in I_+$ donne une borne inférieure de x_1 :

$$x_1 \geqslant -\frac{b_k + a_{k,2}x_2 + \dots}{a_{k1}};$$

- Une contrainte $k \in I_-$ donne une borne supérieure de x_1 :

$$x_1 \leqslant \frac{b_k + a_{k,2}x_2 + \dots}{-a_{k1}};$$

- Pour éliminer x_1, il suffit d'écrire que chaque borne inférieure est inférieure à chaque borne supérieure.
- On poursuit jusqu'à élimination de toutes les variables. Au bout de n étapes, le système est de la forme : $b^{(n)} \geqslant 0$, qu'il suffit d'inspecter.

Correction

On dit que le test réussit si $b^{(n)} \geqslant 0$, et qu'il échoue dans le cas contraire.

Théorème

Si le test échoue, alors le système initial est infaisable.

Démonstration.

Supposons *a contrario* que le système initial a une solution u. Les transformations effectuées sur les contraintes sont de simples manipulations algébriques valides ; on en conclu que les intervalles obtenus en comparant une borne inférieure et une borne supérieure sont non vides, et donc que le système $A^{(1)}x(1) + b(1) \geqslant 0$ est faisable.
En poursuivant l'élimination, on en arrive au système d'ordre $n-1$, qui n'a plus qu'une seule inconnue x_n et qui est également faisable. Mais le fait que l'un des $b^{(n)} < 0$ indique que l'un des intervalles de variation de x_n est vide, une contradiction. $\square$

Complétude

Théorème
Si le test réussit, le système initial est faisable.

Démonstration.
On exhibe une solution du système initial en la construisant de proche en proche à partir de sa dernière composante. On part du système

$$A^{(n-1)}x^{(n-1)} + b^{(n-1)} \geqslant 0.$$

Le fait que les $b^{(n)} \geqslant 0$ garantit que l'intervalle des valeurs possibles de x_n est non vide. On en choisit une arbitrairement et on la reporte dans le système d'ordre $n-2$. Ce système n'a plus qu'une inconnue, x_{n-1}, dont l'intervalle des valeurs possibles est non vide. On poursuit ainsi jusqu'à avoir donné une valeur à toutes les composantes de x. □

Remarques

- Si on s'astreint à choisir à chaque pas la solution la plus petite, *i.e.* la borne inférieure de l'intervalle de variation, on obtient le minimum lexicographique de P, les inconnues étant prises dans l'ordre $x_n, \ldots, x_1$.
- Il n'est pas obligatoire de poursuive l'élimination jusqu'à la fin. Si on s'arrête à l'étape p, les variables de $x^{(p)}$ deviennent des paramètres. Les conditions $b^{(p)} \geqslant 0$ délimitent les valeurs des paramètres pour lesquelles le système est faisable. Enfin, le procédé de sélection ci-dessus donne la valeur paramétrique de la solution.
- L'algorithme peut s'exécuter sans division. La combinaison de la contrainte $j \in I_+$ et de la contrainte $k \in I_-$ se fait en multipliant la première par $-a_{k1} > 0$ et l'autre par $a_{j1} > 0$ et en additionnant.

Complexité

- On évalue d'abord une borne du nombre de contraintes à l'étape p, m_p, soit $m_p = x_0 + x_+ \times x_+$.
- Comme $x_0 + x_+ + x_- = m_{p-1}$, m_p prend sa valeur maximum pour $x_0 = 0$ et $x_+ = x_- = m_{p-1}/2$, à condition que $m_{p-1} > 4$.
- Pour le cas le pire, on a donc la récurrence $m_p = (\frac{m_{p-1}}{2})^2$ dont la solution est $m_n = (\frac{m}{2})^{2^n}$. C'est aussi une borne du travail à effectuer.
- La complexité est donc énorme sauf pour les petits systèmes. Mais la redondance est également énorme, surtout si le système est creux (a beaucoup de coefficients nuls).
- Enfin, il est possible que l'algorithme se termine prématurément.
- L'algorithme de Fourier-Motzkin est très simple à programmer, mais il doit être réservé à de petits problèmes.