

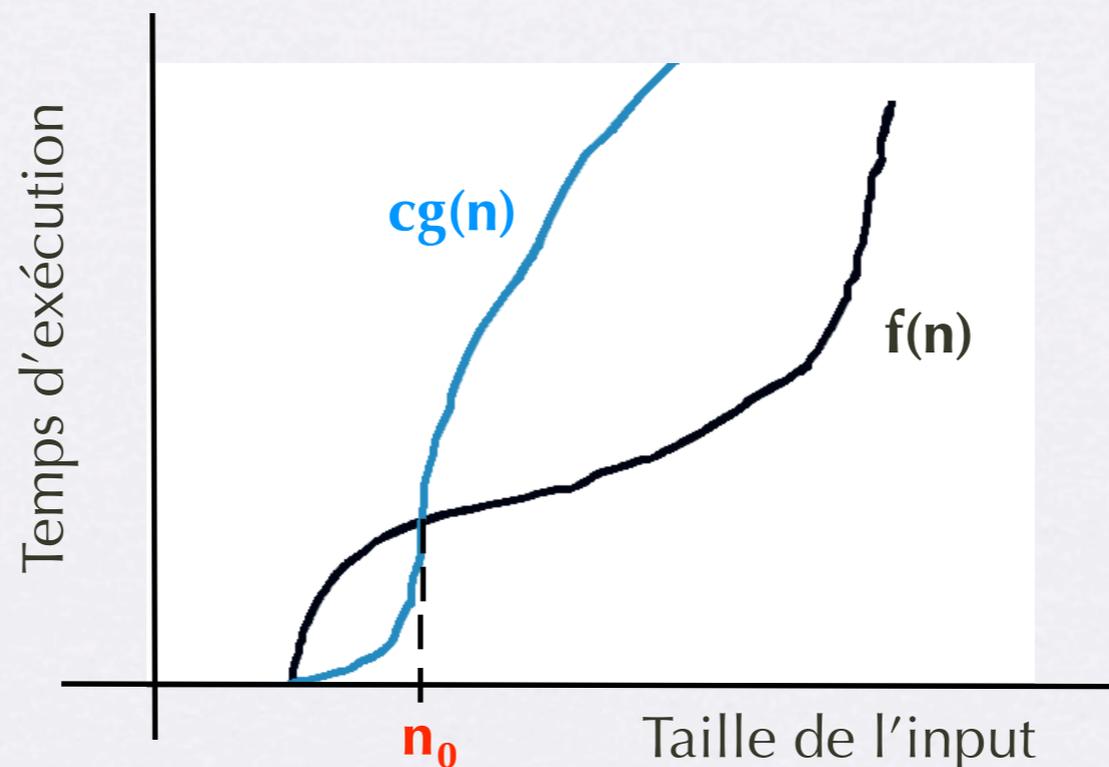
Notation Grand O (§2.2)

Étant donné des fonctions $f(n)$ et $g(n)$, on dit que

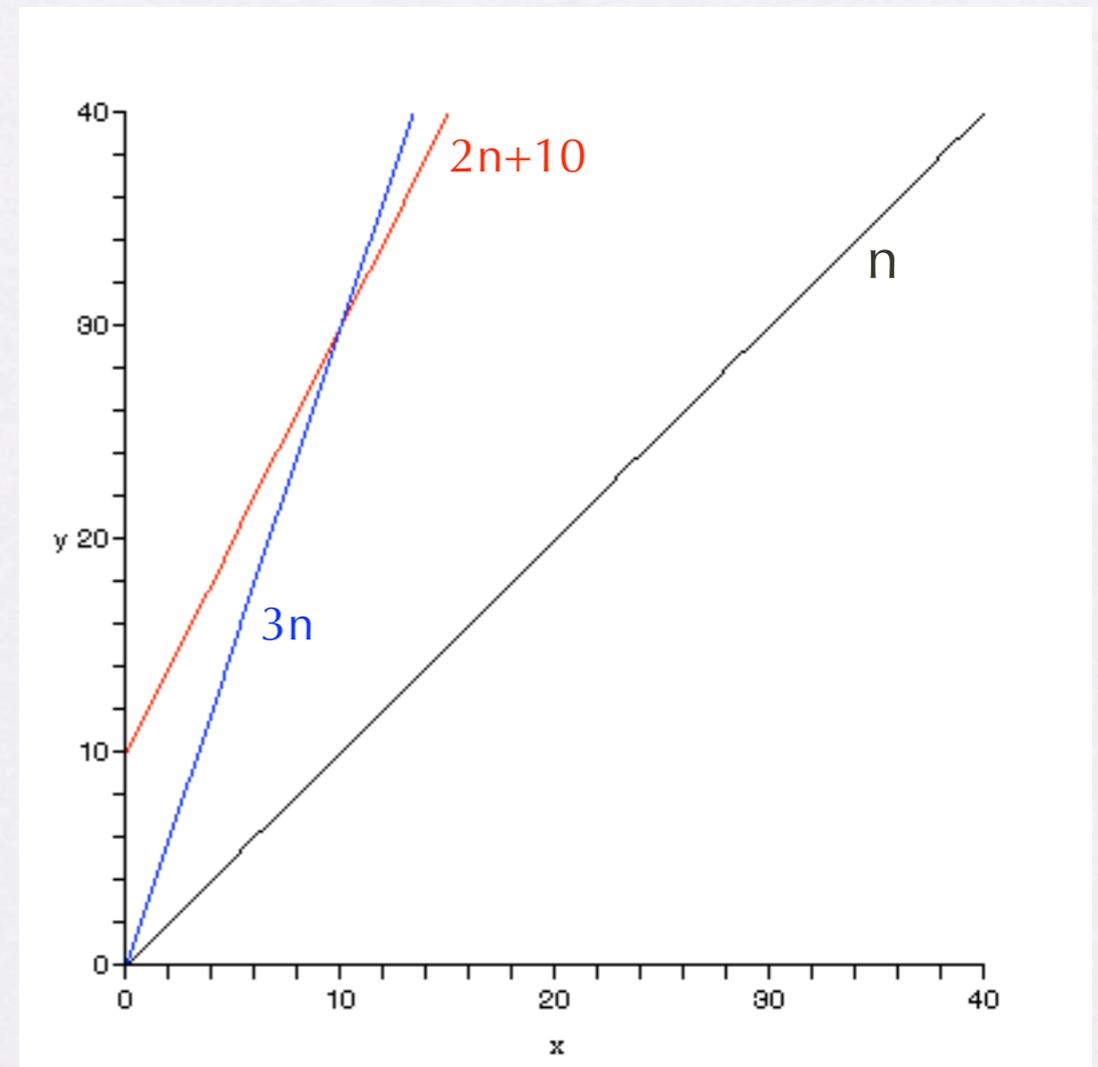
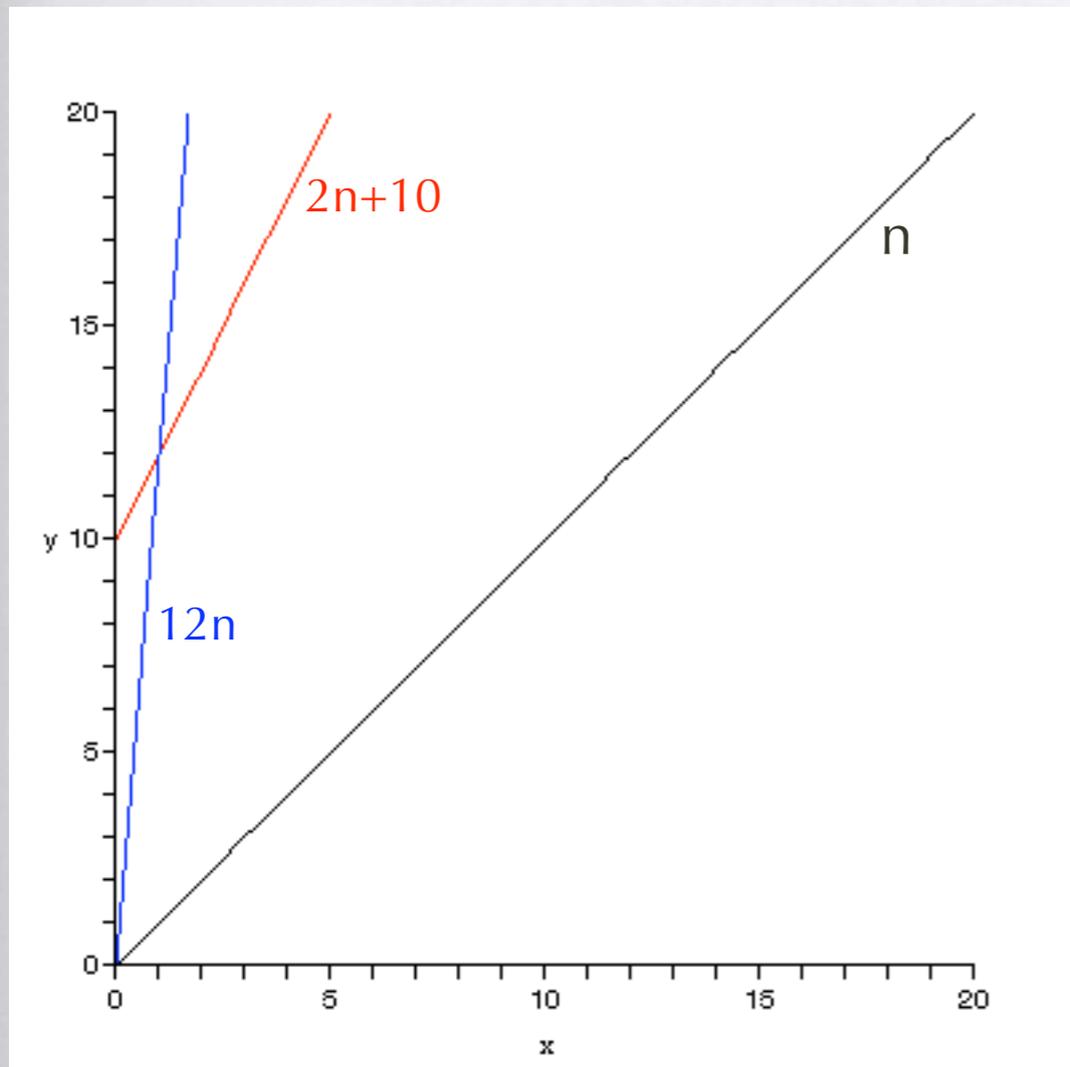
$f(n)$ est $O(g(n))$

s'il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que

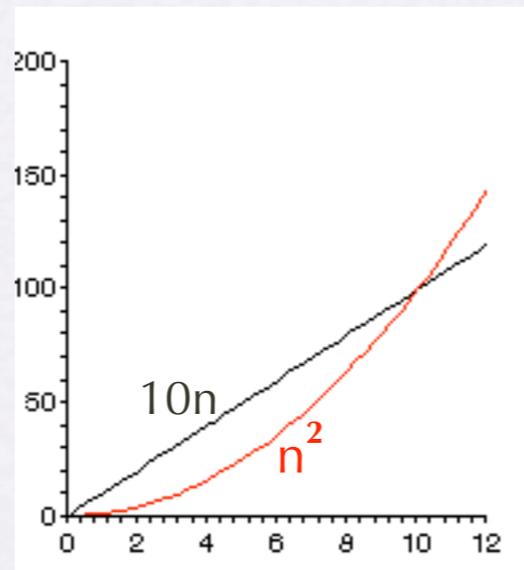
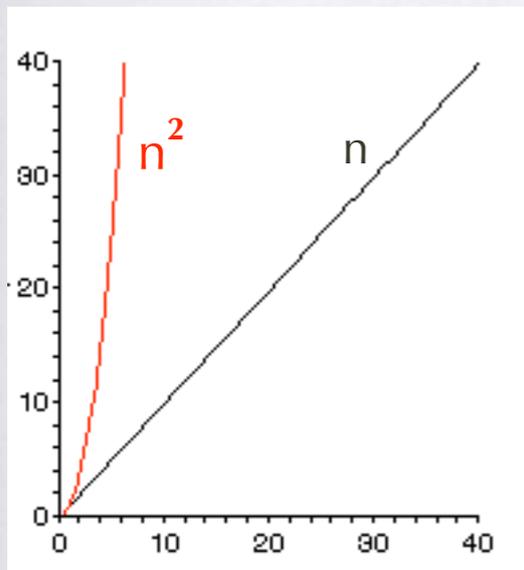
$$f(n) \leq cg(n) \quad \forall \text{entier } n \geq n_0$$



Exemple 1 : $2n + 10$ est $O(n)$

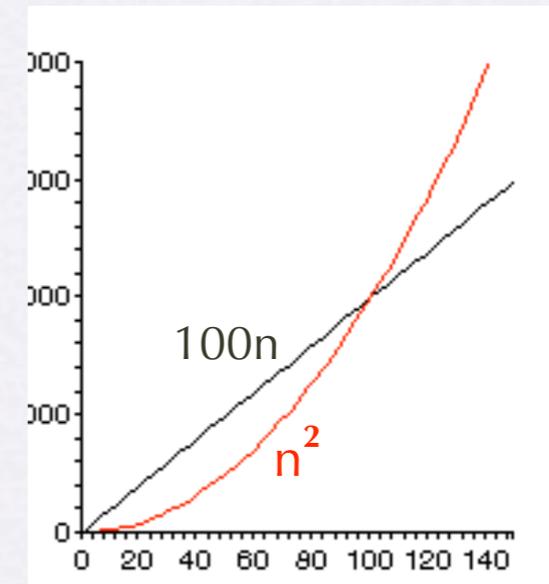


Exemple 2 : n^2 n'est pas $O(n)$



$$n=10 \\ 10n = n^2 = 100$$

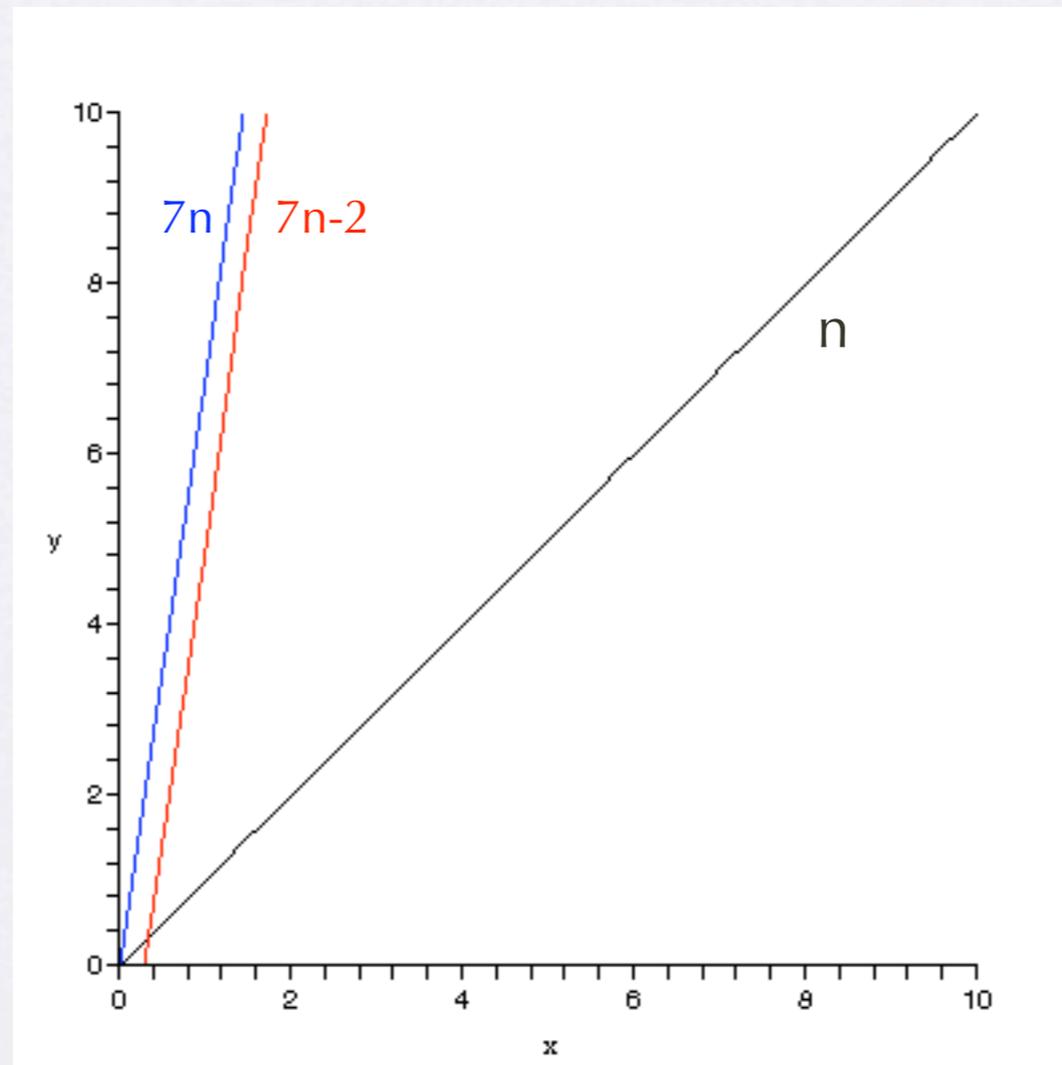
$$n=11 \\ 10n = 110 \\ n^2 = 121$$



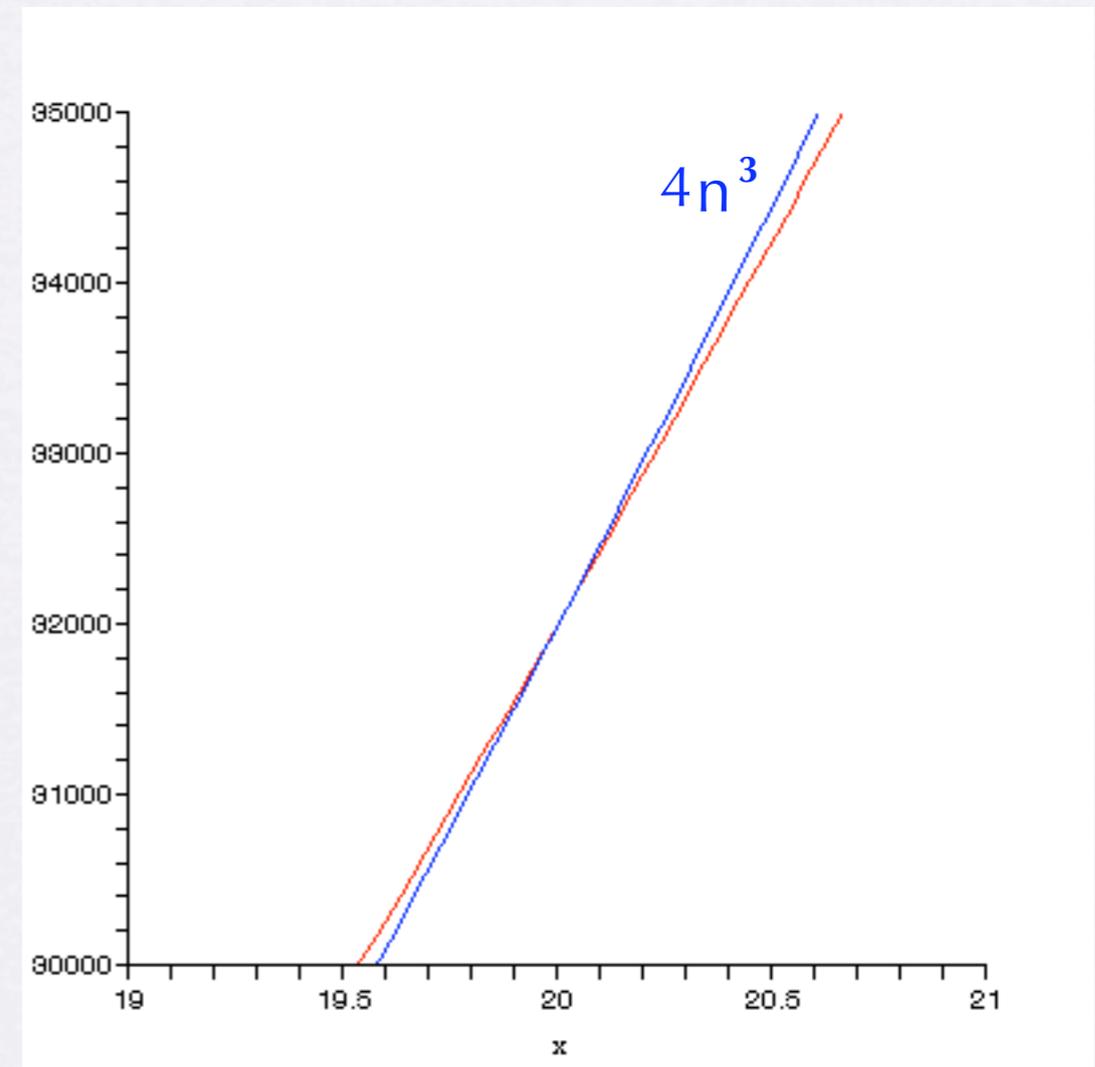
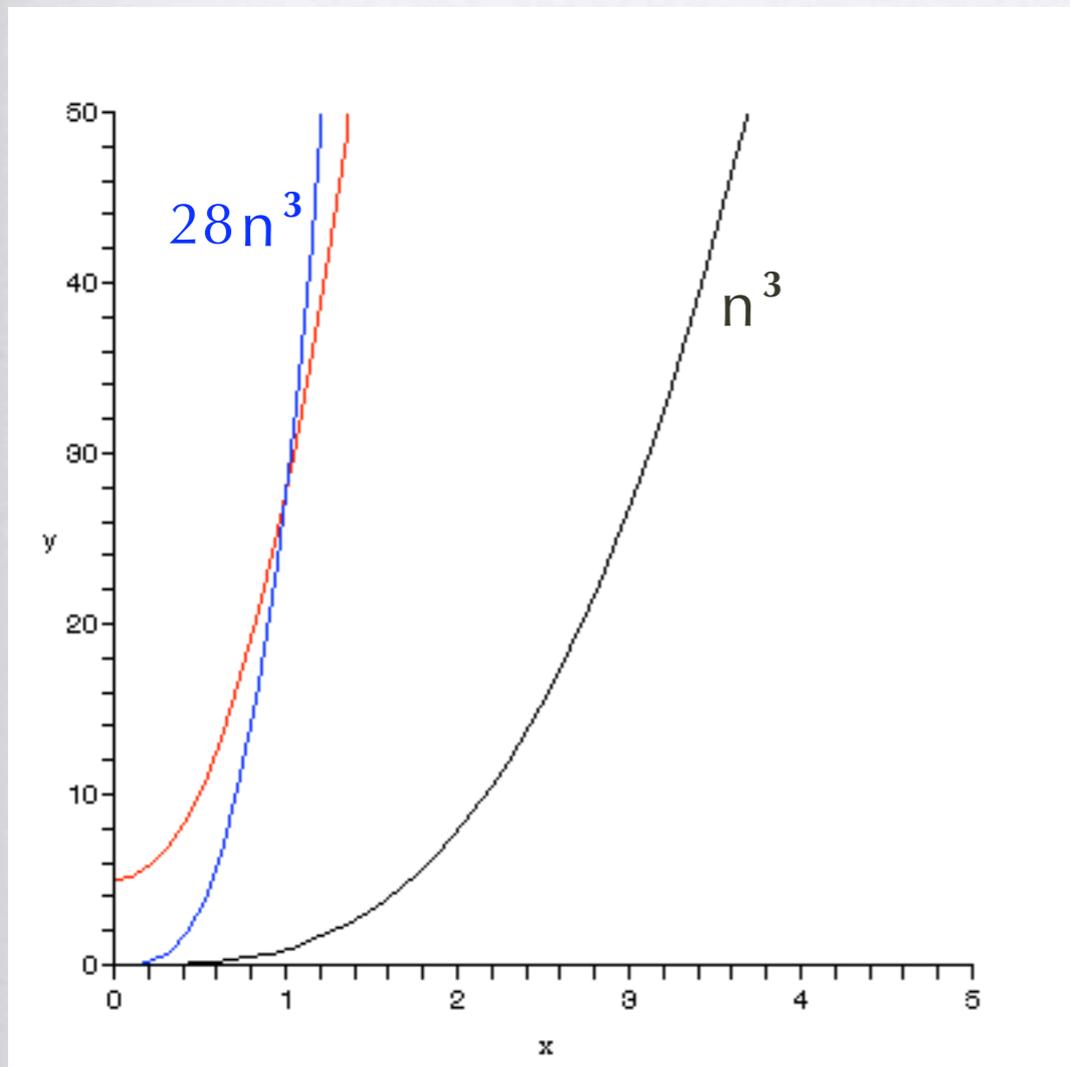
$$n=100 \\ 100n = n^2 = 10000$$

$$n=101 \\ 100n = 10100 \\ n^2 = 10201$$

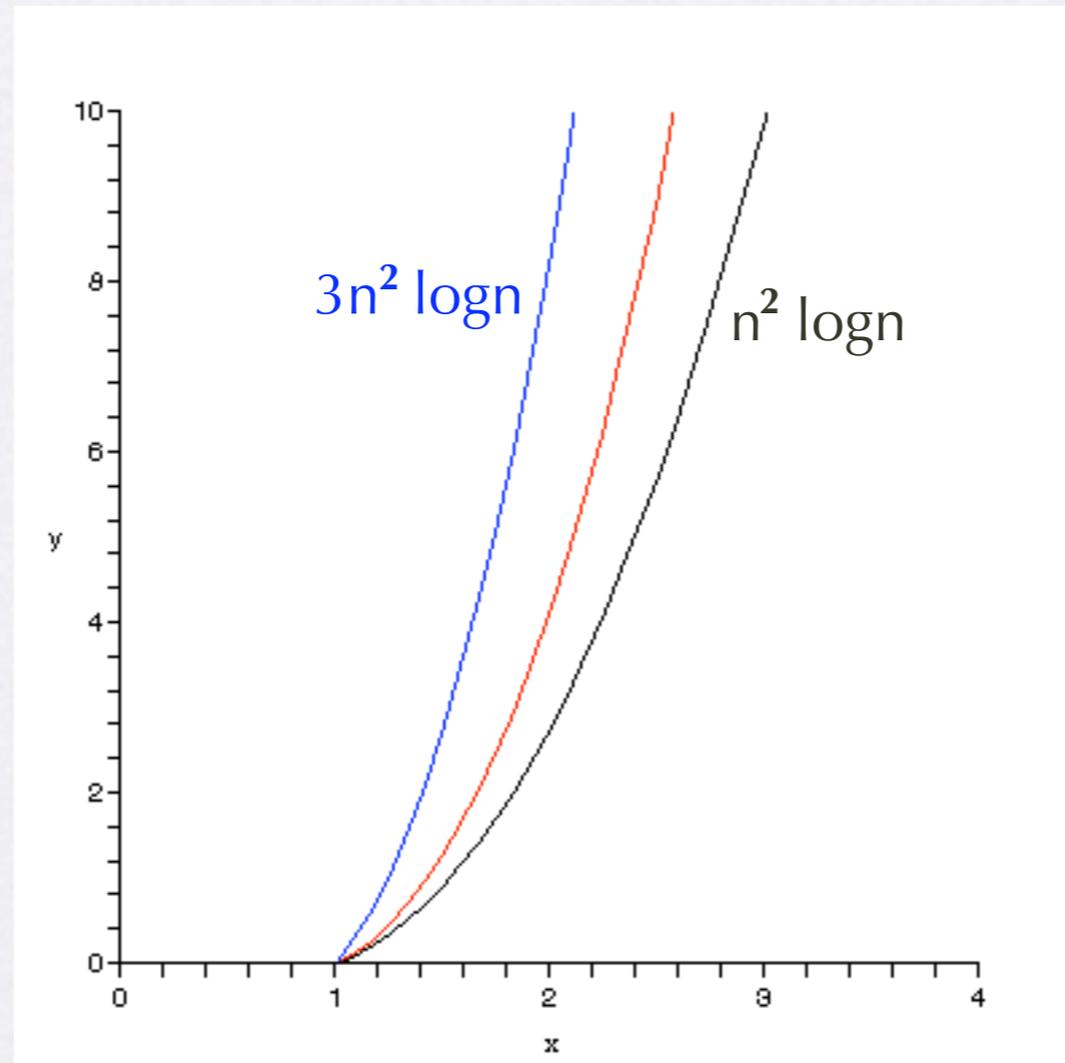
Exemple 3 : $7n - 2$ est $O(n)$



Exemple 4 : $3n^3 + 20n^2 + 5$ est $O(n^3)$



Exemple 5 : $3n \log(n!)$ est $O(n^2 \log n)$



Grand O et taux de croissance

- La notation grand O donne une borne supérieure du taux de croissance d'une fonction.
- La phrase " $f(n)$ est $O(g(n))$ " signifie donc que le taux de croissance de $f(n)$ est plus petit ou égal au taux de croissance de $g(n)$.
- On peut utiliser la notation O pour ordonner les fonctions à partir de leur taux de croissance.

$$1 \leq \log n \leq n \leq n \log n \leq n^2 \leq 2^n \leq n^n$$

Règles d'utilisation

- Si $f(n)$ est un polynôme de degré d , alors $f(n)$ est $O(n^d)$ i.e.
 - On “oublie” les termes de + petit ordre (exposant)
 - On “oublie” les termes constants
- On utilise toujours la + petite classe de fonctions
 - On dit “ $2n$ est $O(n)$ ” et non “ $2n$ est $O(n^2)$ ”
- On utilise toujours l'expression de la fonction la + simple d'une classe
 - On dit “ $3n+5$ est $O(n)$ ” et non “ $3n+5$ est $O(3n)$ ”

Propriétés

1. Si $f_1(x)$ est $O(g_1(x))$ et $f_2(x)$ est $O(g_2(x))$ alors
 $(f_1+f_2)(x)$ est $O(\max(g_1(x), g_2(x)))$

→ Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont $O(g(x))$, alors $(f_1+f_2)(x)$ est $O(g(x))$

2. Si $f_1(x)$ est $O(g_1(x))$ et $f_2(x)$ est $O(g_2(x))$ alors
 $(f_1f_2)(x)$ est $O(g_1(x)g_2(x))$

Grand Ω et grand Θ

- Grand Ω

Étant donné des fonctions $f(n)$ et $g(n)$, on dit que

$f(n)$ est $\Omega(g(n))$

s'il existe des constantes $c > 0$ et $n_0 \geq 1$ telles que

$$f(n) \geq cg(n) \quad \forall \text{entier } n \geq n_0$$

- Grand Θ

Étant donné des fonctions $f(n)$ et $g(n)$, on dit que

$f(n)$ est $\Theta(g(n))$

si $f(n)$ est $O(g(n))$ et $f(n)$ est $\Omega(g(n))$, i.e s'il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

$$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \quad \forall n \geq n_0$$

Intuition: notation asymptotique

- Grand O

$f(n)$ est $O(g(n))$ si $f(n)$ est asymptotiquement plus petite ou égale à $g(n)$

- Grand Ω

$f(n)$ est $\Omega(g(n))$ si $f(n)$ est asymptotiquement plus grande ou égale à $g(n)$

- Grand Θ

$f(n)$ est $\Theta(g(n))$ si $f(n)$ est asymptotiquement égale à $g(n)$