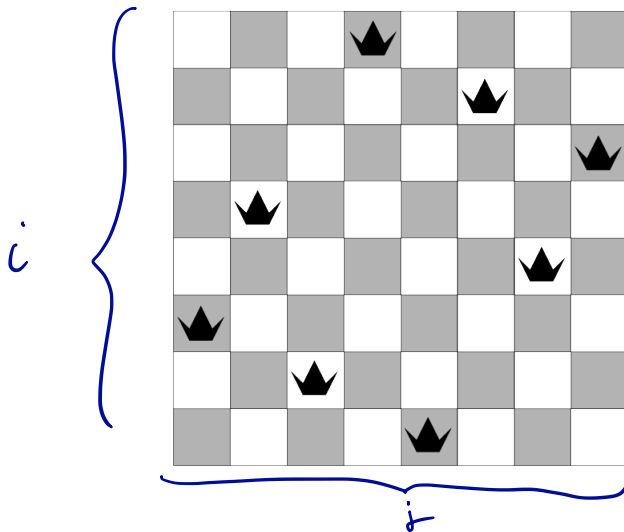


## 173 Problème des 8 reines (Au Tableau)



1. Quelles variables utiliser ?

$$\{ x_{i,j} \mid i, j \in \{1, \dots, 8\} \}$$

interprétation:  $x_{i,j}$  est vraie si et seulement si la case de coordonnées  $(i,j)$  contient une reine.

2. Une seule reine par ligne (au plus)

"Pour toute ligne  $i$  et toute colonne  $j$ , si  $(i,j)$  contient une reine, alors pour toute colonne  $k \neq j$ ,  $(i,k)$  ne contient pas de reine"

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, 8\}} (x_{i,j} \rightarrow \bigwedge_{\substack{k \in \{1, \dots, 8\} \\ k \neq j}} \neg x_{i,k})$$

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, 8\}} \left( x_{ij} \rightarrow \bigwedge_{\substack{k \in \{1, \dots, 8\} \\ k+j}} \neg x_{ik} \right)$$

En forme normale conjonctive:

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, 8\}} \left( \neg x_{ij} \vee \bigwedge_{\substack{k \in \{1, \dots, 8\} \\ k+j}} \neg x_{ik} \right)$$

$$\equiv \bigwedge_{i \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{\substack{k \in \{1, \dots, 8\} \\ k+j}} \left( \neg x_{ij} \vee \neg x_{ik} \right)$$

3. Au moins une reine par ligne:

"Pour toute ligne  $i$ , il existe une colonne  $j$  telle que

$(i, j)$  contient une reine"

$i \in \{1, \dots, 8\}$

$j \in \{1, \dots, 8\}$   $x_{i,j}$

4. Pas d'attaque horizontale: pareil que "une seule reine au plus par ligne"

5. Pas d'attaque verticale: "au plus une seule reine par colonne"

$$\bigwedge_{i \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{j \in \{1, \dots, 8\}} \bigwedge_{\substack{k \in \{1, \dots, 8\} \\ k \neq j}} (\neg x_{j,i} \vee \neg x_{k,i})$$

6. Pas d'attaque en diagonale

$$\bigwedge_{\substack{i,j,k,l \in \{1, \dots, 8\} \\ (i,j) \neq (k,l)}} (\neg x_{i,j} \vee \neg x_{k,l})$$

$(i,j)$  et  $(k,l)$  sont  
sur la même diagonale

→ équivaut à  
 $|i-k| = |j-l|$

Remarque: il y a un nombre cubique de clauses (environ  $8^3$ )  
car pour toute case  $(i,j)$  on va générer au plus  $2 \times 7$  clauses  
(car il y a au plus  $2 \times 7$  cases sur la même diagonale que  $(i,j)$ )