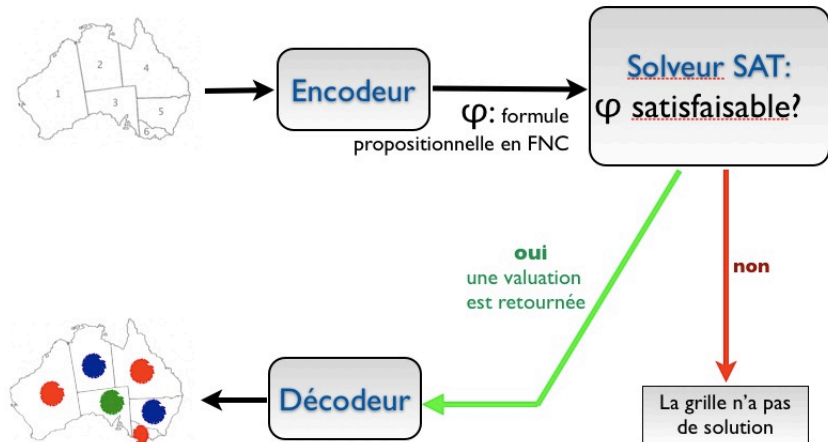


Modélisation : Rappel



1. Il faut introduire les symboles de proposition de telle sorte que des valeurs de vérité affectées à ces propositions par le solveur nous permettent de retrouver facilement un coloriage.

Ici, un symbole par région et par couleur.

Couleurs = $\{R, V, B\}$

Régions = $\{1, 2, \dots, 6\}$

Propositions : $\{x_{r,c} \mid r \in \text{Régions}, c \in \text{Couleurs}\}$

1. Chaque région doit être colorée (par au moins une couleur)

Pour la région 1: $x_{1,R} \vee x_{1,V} \vee x_{1,B}$

Pour toutes les régions: $\bigwedge_{i=1}^6 (x_{i,R} \vee x_{i,V} \vee x_{i,B})$

2. Chaque région doit être colorée par au plus une couleur

Pour la région 1: $(x_{1,R} \rightarrow \neg x_{1,V} \wedge \neg x_{1,B}) \wedge$

$(x_{1,V} \rightarrow \neg x_{1,R} \wedge \neg x_{1,B}) \wedge$

$(x_{1,B} \rightarrow \neg x_{1,R} \wedge \neg x_{1,V})$

Équivalent à: $\neg x_{1,R} \vee (\neg x_{1,V} \wedge \neg x_{1,B}) \equiv (\neg x_{1,R} \vee \neg x_{1,V}) \wedge$
 $(\neg x_{1,R} \vee \neg x_{1,B})$

Pour toutes les régions et tous les couples de contours, on obtient :

$$\begin{array}{l} \bigwedge \\ r \in \text{Régions} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bigwedge \\ c, c' \in \text{Contours} \\ c \neq c' \end{array} \quad (\neg x_{r,c} \vee \neg x_{r,c'})$$

3. Les contraintes de voisinage :

On note "Voisines" l'ensemble des paires de régions voisines.

Pour les régions 1 et 2 :

$$\begin{aligned} & (x_{1,R} \rightarrow (x_{2,V} \vee x_{2,B})) \\ & \wedge (x_{1,V} \rightarrow (x_{2,R} \vee x_{2,B})) \\ & \wedge (x_{1,B} \rightarrow (x_{2,R} \vee x_{2,V})) \end{aligned}$$

Pour toutes les paires de régions voisines:

$$\bigwedge_{(r_1, r_2) \in \text{Voisines}} \bigwedge_{c_1 \in \text{Couleurs}} \left(x_{r_1, c_1} \rightarrow \bigvee_{\substack{c_2 \in \text{Couleurs} \\ c_2 \neq c_1}} x_{r_2, c_2} \right)$$

$$\equiv \bigwedge_{(r_1, r_2) \in \text{Voisines}} \bigwedge_{c_1 \in \text{Couleurs}} \left(\neg x_{r_1, c_1} \vee \bigvee_{\substack{c_2 \in \text{Couleurs} \\ c_2 \neq c_1}} x_{r_2, c_2} \right)$$

Autres solutions:

$$\bigwedge_{(r_1, r_2) \in \text{Voisines}} \bigwedge_{c \in \text{Couleurs}} \left(\neg x_{r_1, c} \vee \neg x_{r_2, c} \right)$$

Coloriage de Cartes - Modélisation

Choix des Propositions

- ▶ fixons un nombre de couleurs (3) et exprimons l'existence d'un coloriage avec 3 couleurs en logique propositionnelle.
- ▶ la première étape consiste à définir l'ensemble des propositions et leur sémantique
- ▶ ici, l'ensemble des régions est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des couleurs est $\{R, V, B\}$. Pour chaque région r et chaque couleur c , nous introduisons la proposition $x_{r,c}$. Soit

$$X = \{x_{r,c} \mid r \in \{1, \dots, 6\}, c \in \{R, V, B\}\}$$

- ▶ Nous posons la sémantique suivante : si l'interprétation V trouvée par le solveur SAT est telle que $V(x_{r,c}) = 1$, alors cela signifie que la région r est coloriée avec la couleur c

Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- ▶ les régions voisines doivent avoir des couleurs différentes, ici les régions voisines sont données par l'ensemble des paires
 $Voisines = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (3, 5), (5, 6), (3, 6)\}$.

Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- ▶ les régions voisines doivent avoir des couleurs différentes, ici les régions voisines sont données par l'ensemble des paires $Voisines = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (3, 5), (5, 6), (3, 6)\}$.
- ▶ comment exprimer que 1 et 2 ont des couleurs différentes ?

Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- Il faut exprimer la contrainte pour toutes les paires voisines de $Voisines = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (3, 5), (5, 6), (3, 6)\}$:

$$\begin{aligned}
 & (\neg X_{1,V} \vee \neg X_{2,V}) \wedge (\neg X_{1,B} \vee \neg X_{2,B}) \wedge (\neg X_{1,R} \vee \neg X_{2,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{1,V} \vee \neg X_{3,V}) \wedge (\neg X_{1,B} \vee \neg X_{3,B}) \wedge (\neg X_{1,R} \vee \neg X_{3,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{2,V} \vee \neg X_{4,V}) \wedge (\neg X_{2,B} \vee \neg X_{4,B}) \wedge (\neg X_{2,R} \vee \neg X_{4,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{3,V} \vee \neg X_{4,V}) \wedge (\neg X_{3,B} \vee \neg X_{4,B}) \wedge (\neg X_{3,R} \vee \neg X_{4,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{4,V} \vee \neg X_{5,V}) \wedge (\neg X_{4,B} \vee \neg X_{5,B}) \wedge (\neg X_{4,R} \vee \neg X_{5,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{3,V} \vee \neg X_{5,V}) \wedge (\neg X_{3,B} \vee \neg X_{5,B}) \wedge (\neg X_{3,R} \vee \neg X_{5,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{5,V} \vee \neg X_{6,V}) \wedge (\neg X_{5,B} \vee \neg X_{6,B}) \wedge (\neg X_{5,R} \vee \neg X_{6,R}) \\
 \wedge & (\neg X_{3,V} \vee \neg X_{6,V}) \wedge (\neg X_{3,B} \vee \neg X_{6,B}) \wedge (\neg X_{3,R} \vee \neg X_{6,R})
 \end{aligned}$$

Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- Il faut exprimer la contrainte pour toutes les paires voisines de $Voisines = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (3, 5), (5, 6), (3, 6)\}$:

$$\begin{aligned}
 & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{1,c} \vee \neg x_{2,c}) \\
 \wedge & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{1,c} \vee \neg x_{3,c}) \\
 \wedge & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{2,c} \vee \neg x_{4,c}) \\
 \wedge & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{3,c} \vee \neg x_{4,c}) \\
 \wedge & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{4,c} \vee \neg x_{5,c}) \\
 \wedge & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{3,c} \vee \neg x_{5,c}) \\
 \wedge & (\bigwedge_{c \in \{R, V, B\}} \neg x_{5,c} \vee \neg x_{6,c})
 \end{aligned}$$

Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- ▶ Il faut exprimer la contrainte pour toutes les paires voisines de $Voisines = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 5), (3, 5), (5, 6), (3, 6)\}$:

$$\phi = \bigwedge_{(i,j) \in Voisines} \bigwedge_{c \in \{R,V,B\}} \neg x_{i,c} \vee \neg x_{j,c}$$

- ▶ codons le problème dans MiniSAT

Coloriage de Cartes - Sortie de MiniSAT

```

efiliot@plabuntu:/mnt/hgfs/Partage-Ubuntu/Coloriage$ ./coloriage
=====
|[MINISAT]|
| Conflicts | ORIGINAL | LEARN | Progress |
| | Clauses Literals | Limit Clauses Literals Lit/C| |
=====
| 0 | 27 60 | 9 0 0 -nan | 0.000 % |
=====

```

La formule est satisfaisable.

- La region 1 est colorie avec la couleur 1
- La region 2 est colorie avec la couleur 2
- La region 3 est colorie avec la couleur 3
- La region 4 est colorie avec la couleur 1
- La region 5 est colorie avec la couleur 2
- La region 6 est colorie avec la couleur 1

