Logique du premier ordre
Deuxième partie :
Interprétation d'une formule

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

16 mars 2017

À chercher

Traduire en logique du premier ordre :

- Il y a des gens qui s'aiment.

  $\exists x \, \exists y \ (a(x,y) \wedge a(y,x))$

- Si deux personnes s'aiment l'une l'autre, alors elles sont conjointes.

  $\forall x \, \forall y \ (a(x,y) \wedge a(y,x) \Rightarrow c(x) = y \wedge c(y) = x)$

- On ne peut pas aimer deux personnes à la fois.

  $\forall x \, \forall y \ (a(x,y) \Rightarrow \forall z \ (a(x,z) \Rightarrow y = z))$

  $\forall x \, \forall y \, \forall z \ (a(x,y) \wedge a(x,z) \Rightarrow y = z)$

Plan

Plan

Rappels

- D est un domaine non vide.
- I est une interprétation des symboles de la formule en tant que
  1. constantes ($\in D$)
  2. fonctions ($D^n \to D$)
  3. variables propositionnelles ($\in \{0, 1\}$)
  4. relations ($\subseteq D^n$).
- e est un état des variables *libres* de la formule, qui associe à chacune un élément du domaine D.

Exemple 4.3.29

Considérons la signature suivante.

- $Anne^{f0}$, $Bernard^{f0}$ et $Claude^{f0}$
- a^{r2} ($a(x,y)$ signifie « x aime y »)
- c^{f1} ($c(x)$ désigne le conjoint de x).

Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0,1,2\}$ où :

- $Anne_I^{f0} = 0$, $Bernard_I^{f0} = 1$, et $Claude_I^{f0} = 2$.
- $a_I^{r2} = \{(0,1),(1,0),(2,0)\}$
- $c_I^{f1}(0) = 1,\ c_I^{f1}(1) = 0,\ c_I^{f1}(2) = 2$.

  $c_I^{f1}(2)$ est défini artificiellement : Claude n'a pas de conjoint.

Exemple 4.3.29

Soit e l'état $x = 0, y = 2$. Nous avons :

- $[a(x, c(x))]_{(I,e)} =$

  $\boxed{\begin{array}{l}\text{1 car} \\ (\llbracket x \rrbracket_{(I,e)}, \llbracket c(x) \rrbracket_{(I,e)}) = (0, c_I^{f1}(\llbracket x \rrbracket_{(I,e)})) = (0, c_I^{f1}(0)) = (0, 1) \in a_I^{r2}.\end{array}}$

- $[a(y, c(y))]_{(I,e)} =$

  $\boxed{\begin{array}{l}\text{0 car} \\ (\llbracket y \rrbracket_{(I,e)}, \llbracket c(y) \rrbracket_{(I,e)}) = (2, c_I^{f1}(\llbracket y \rrbracket_{(I,e)})) = (2, c_I^{f1}(2)) = (2, 2) \notin a_I^{r2}.\end{array}}$

Attention à distinguer (suivant le contexte), les éléments du domaine $0, 1$ et les valeurs de vérité $0, 1$.

Exemple 4.3.29

Nous avons :

- $[(Anne = Bernard)]_I =$

  $\boxed{0, \text{ car } ([\![Anne]\!]_I, [\![Bernard]\!]_I) = (0,1) \quad et \quad (0,1) \notin =_I^{r2}.}$

- $[(c(Anne) = Anne)]_I =$

  0, car
  $([\![c(Anne)]\!]_I, [\![Anne]\!]_I) = (c_I^{f1}([\![Anne]\!]_I), 0) = (c_I^{f1}(0), 0) = (1, 0).$

- $[(c(c(Anne)) = Anne)]_I =$

  $\boxed{1, \text{ car } [\![c(c(Anne))]\!]_I = c_I^{f1}([\![c(Anne)]\!]_I) = c_I^{f1}(c_I^{f1}(0)) = c_I^{f1}(1) = 0.}$

Sens des formules 4.3.30

1. Les connecteurs propositionnels ont le même sens qu'en logique propositionnelle.
2. Notons $e[x = d]$ l'état identique à l'état e, sauf pour x.

$$[\forall x B]_{(I,e)} = min_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])} = \prod_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])},$$

   vrai si $[B]_{(I,f)} = 1$ pour tout état f identique à e, sauf pour x.

3. $$[\exists x B]_{(I,e)} = max_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])} = \sum_{d \in D}[B]_{(I,e[x=d])},$$

   vrai s'il y a un état f identique à e, sauf pour x, tel que $[B]_{(I,f)} = 1$.

Exemple 4.3.32

Utilisons l'interprétation I donnée dans l'exemple 4.3.19.
(Rappel $D = \{0, 1, 2\}$)

- $[\exists x\ a(x,x)]_I$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \max\{[a(0,0)]_I, [a(1,1)]_I, [a(2,2)]_I\} = 0 \\ &= [a(0,0)]_I + [a(1,1)]_I + [a(2,2)]_I = 0 + 0 + 0 = 0. \end{aligned}}$$

- $[\forall x \exists y\ a(x,y)]_I$

$$\boxed{\begin{aligned} &= \min\{\max\{[a(0,0)]_I,\ [a(0,1)]_I,\ [a(0,2)]_I\}, \\ &\qquad \max\{[a(1,0)]_I,\ [a(1,1)]_I,\ [a(1,2)]_I\}, \\ &\qquad \max\{[a(2,0)]_I,\ [a(2,1)]_I,\ [a(2,2)]_I\}\} \\ &= \min\{\max\{0,1,0\}, \max\{1,0,0\}, \max\{1,0,0\}\} \\ &= \min\{1,1,1\} = 1. \end{aligned}}$$

Exemple 4.3.32

- $[\exists y \forall x\ a(x,y)]_I$

$$= [a(0,0)]_I.[a(1,0)]_I.[a(2,0)]_I + [a(0,1)]_I.[a(1,1)]_I.[a(2,1)]_I$$
$$+ [a(0,2)]_I.\ [a(1,2)]_I.\ [a(2,2)]_I$$
$$= 0.1.1 + 1.0.0 + 0.0.0 = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Remarque 4.3.33

Les formules $\forall x \exists y\ a(x,y)$ et $\exists y \forall x\ a(x,y)$ n'ont pas la même valeur.
En intervertissant un $\exists$ et un $\forall$, on ne préserve pas le sens des formules.

Modèle, validité, conséquence, équivalence

Ces notions sont définies comme en logique propositionnelle mais...

Pour donner une valeur à une formule

- **En logique propositionnelle** : assignation $V \to \{0, 1\}$
- **En logique du premier ordre** : (I, e) où
  - I est une interprétation des symboles
  - e un état des variables.

... on utilise une interprétation au lieu d'une assignation.

La valeur d'une formule ne dépend que :

- de l'état de ses variables libres
- et de l'interprétation de ses symboles.

Plan

Au niveau propositionnel

Substituer une variable propositionnelle dans une formule valide donne une formule valide.

Exemple :

Soit $\sigma(p) = \forall x\ q(x)$.
$p \vee \neg p$ est valide, il en est de même de la formule

$$\sigma(p \vee \neg p) = \forall x\ q(x) \vee \neg \forall x\ q(x)$$

Instanciation d'une variable dans un terme

Définition 4.3.34

$A < x := t >$ est la formule obtenue en remplaçant dans A toute occurrence libre de x par t.

Exemple 4.3.35

Soit A la formule $(\forall x P(x) \vee Q(\mathbf{x}))$, la formule $A < x := b >$ vaut

$(\forall x P(x) \vee Q(b))$ car seule l'occurrence en gras de x est libre.

Mais on ne peut pas substituer n'importe quoi :

Exemple 4.3.37

Soit A la formule $\exists y p(x, y)$.

- $A < x := y >= \boxed{\exists y p(y, y)}$ (phénomène de capture)

Instanciation d'une variable dans un terme : précautions

Solution : notion de terme t libre pour une variable

Définition 4.3.34

2. t est libre pour x dans A si les variables de t ne sont pas liées dans les occurrences libres de x.

Exemple 4.3.35

- Le terme $f(z)$ est libre pour x dans la formule $\exists y p(x, y)$.
- Par contre le terme y n'est pas libre pour x dans cette formule.
- Par définition, le terme x est libre pour x dans toute formule.

Propriétés

Théorème 4.3.36

Soient A une formule et t un terme libre pour la variable x dans A.
Pour toute assignation (I, e) nous avons
$[A < x := t >]_{(I,e)} = [A]_{(I,e[x=d])}$ où $d = [\![t]\!]_{(I,e)}$.

Corollaire 4.3.38

Soient A une formule et t un terme libre pour x dans A.
Les formules $\forall xA \Rightarrow A < x := t >$ et $A < x := t > \Rightarrow \exists xA$ sont valides.

Plan

Modèle fini

Définition

Un modèle fini d'une formule fermée est une interprétation de la formule de *domaine fini*, qui rend vraie la formule.

Remarque

- Le nom des éléments du domaine est sans importance.
- Ainsi pour un modèle avec n éléments, nous utiliserons le domaine des entiers naturels inférieurs à n.

Construire un modèle fini

Idée naïve : Pour savoir si une formule fermée a un modèle de domaine $\{0, \ldots, n-1\}$, il suffit de

- **énumérer** toutes les interprétations possibles de la signature associée à la formule
- **évaluer** la formule pour ces interprétations.

Exemple

Soit $\Sigma = \{a^{f0}, f^{f1}, P^{r2}\}$, plus éventuellement l'égalité.

Sur un domaine à 5 éléments, Σ a $5 \times 5^5 \times 2^{25}$ interprétations !

Logiciel pour construire un modèle fini

MACE

- **traduction** des formules du premier ordre en formules propositionnelles
- **algorithmes performants pour trouver la satisfaisabilité** d'une formule propositionnelle (par exemple `DPLL`)

`http://www.cs.unm.edu/~mccune/mace4`

Plan

Relations entre $\forall$ et $\exists$

Lemme 4.4.1

Soient A une formule et x une variable :

$$\begin{aligned}
\neg\forall x A &\equiv \exists x \neg A \\
\forall x A &\equiv \neg\exists x \neg A \\
\neg\exists x A &\equiv \forall x \neg A \\
\exists x A &\equiv \neg\forall x \neg A
\end{aligned}$$

On prouve les deux premières identités.

Preuve de $\neg\forall xA \equiv \exists x\neg A$

Soit (I, e) une interprétation de domaine D.

$$
\begin{array}{lll}
[\neg\forall xA]_{(I,e)} & = 1 - [\forall xA]_{(I,e)} & \text{sens de } \neg \\
& = 1 - \prod_{d\in D}[A]_{(I,e[x=d])} & \text{sens de } \forall \\
& = \sum_{d\in D}\left(1 - [A]_{(I,e[x=d])}\right) & \text{de Morgan} \\
& = \sum_{d\in D}[\neg A]_{(I,e[x=d])} & \text{sens de } \neg \\
& = [\exists x\neg A]_{(I,e)} & \text{sens de } \exists
\end{array}
$$

Preuve de $\forall xA \equiv \neg\exists x\neg A$:

Transformons $\forall xA$

$$
\begin{array}{ll}
\equiv \neg\neg\forall xA & \text{double négation} \\
\equiv \neg\exists x\neg A & \text{voir ci-dessus}
\end{array}
$$

Déplacement des quantificateurs

Soient x, y deux variables et A, B deux formules.

1. $\forall x \forall y A \equiv \forall y \forall x A$
2. $\exists x \exists y A \equiv \exists y \exists x A$
3. $\forall x (A \wedge B) \equiv (\forall x A \wedge \forall x B)$
4. $\exists x (A \vee B) \equiv (\exists x A \vee \exists x B)$
5. Soient Q un quantificateur et $\circ$ un des connecteurs $\wedge, \vee$
   Si x n'est pas une variable libre de A alors :
   5.1 $Qx\ A \equiv A$,
   5.2 $Qx\ (A \circ B) \equiv A \circ Qx\ B$

Exemple 4.4.2

Nous éliminons de ces deux formules les quantificateurs inutiles :

- $\forall x \exists x P(x) \equiv$

  $\boxed{\exists x P(x)}$

- $\forall x (\exists x P(x) \vee Q(x)) \equiv$

  $\boxed{\exists x P(x) \vee \forall x Q(x)}$

Conclusion