Logique du premier ordre
Première partie :
Langage et Sens des Formules

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

2 mars 2017

Plan de l'UE

- Logique propositionnelle : $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Interprétation : fonctions booléennes
- Systèmes de déduction : résolution, déduction naturelle
- Algorithmes

Plan de l'UE

- Logique propositionnelle : $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Interprétation : fonctions booléennes
- Systèmes de déduction : résolution, déduction naturelle
- Algorithmes

- Logique du premier ordre : $\forall, \exists$
- Interprétation
- « Résolution au premier ordre »
- Déduction naturelle au premier ordre

Aperçu de la logique du premier ordre

Un domaine : les *objets* sur lesquels on raisonne

Trois catégories :

- les termes qui représentent des éléments du domaine
- les relations entre éléments du domaine
- les formules qui décrivent les interactions entre les relations

Deux nouveaux symboles (quantificateurs) dans les formules

$\forall$ (quantificateur universel) et $\exists$ (quantificateur existentiel)

Exemples :

- domaine = membres d'une famille
- le terme $pere(x)$ désigne un élément du domaine (le père de x)
- la relation *frere* détermine si deux éléments sont frères
- la formule $\forall x \exists y\ frere(y, x)$ signifie “tout individu a un frère”.

Syllogisme

Tous les hommes sont mortels.
Socrate est un homme.
Donc Socrate est mortel.

$$\forall x(\mathit{homme}(x) \Rightarrow \mathit{mortel}(x))$$
$$\mathit{homme}(\mathit{Socrate})$$
$$\mathit{mortel}(\mathit{Socrate})$$

Vocabulaire

- Deux constantes propositionnelles : $\bot$ et $\top$
- Connecteurs : $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Représentation en arbre

Exemple 4.1.12 $\forall x P(x) \Rightarrow Q(x)$

$\forall$ est prioritaire : l'opérande gauche de l'implication est $\forall x P(x)$.

$$
\begin{tikzcd}
& \Rightarrow \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\forall x \arrow[d] & & Q \arrow[d] \\
P \arrow[d] & & x \\
x & &
\end{tikzcd}
$$

Idée

- Le sens de la formule $x+2=4$ dépend de x.
  La formule n'est vraie (en arithmétique) que si $x=2$.
  x est libre dans cette formule
- $\forall x(x+2=4)$ est insatisfaisable (en arithmétique).
  $\forall x(x+0=x)$ est valide.
  Il n'y a pas à choisir de valeur pour x.
  Ces deux formules n'ont pas de variables libres.
- Le nom de la variable n'a alors plus d'importance.
  Situation courante en mathématiques $\int_0^1 f(x)dx$
  ... et en informatique

```
function Toto(x : in Integer) return Integer is
    begin
return x + 1;
    end Toto;
```

Occurences libres et liées

Définition 4.2.1

Un quantificateur lie une variable localement.

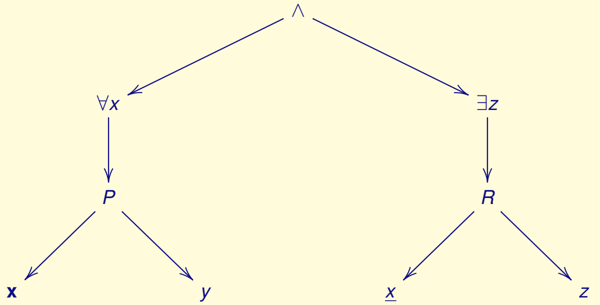
- Dans $\forall x\ A$ ou $\exists x\ A$, la portée de la liaison pour x est A.
- Une occurrence de x est liée si elle est dans la portée d'une liaison pour x.
- Sinon elle est dite libre.

Si nous représentons une formule par un arbre :

- Une occurrence liée de x est en dessous d'un sommet $\exists x$ ou $\forall x$.
- Toute autre occurrence de x est libre.

Exemple 4.2.2

$\forall x P(\mathbf{x}, y) \wedge \exists z R(\underline{x}, z)$



- L'occurrence de z est liée et celle de y est libre.
- L'occurrence en gras de x est liée.
- L'occurrence soulignée de x est libre.

Variables libres, liées

Définition 4.2.3

- Une variable x est libre dans une formule A si elle a au moins une occurrence libre dans cette formule.
- De même x est liée dans A si elle a une occurrence liée dans A.
- Une formule sans variable libre est dite formule fermée.

Remarques

- Dans $\forall x P(x) \vee Q(x)$, la variable x est à la fois libre et liée.
- Si x n'apparaît pas dans une formule alors elle n'y est pas libre.

Exemple 4.2.6

Les variables libres de $\forall x P(x, y) \wedge \exists z R(x, z)$ sont x et y.

Déclaration de symbole

Définition 4.3.1

Une déclaration de symbole est un triplet noté s^{gn} où :

- s est un symbole
- g une des lettres f (signifiant fonction) ou r (signifiant relation)
- n est un entier naturel.

Remarque 4.3.3

g et n sont facultatifs s'ils sont clairs étant donné le contexte.

Exemple : **égal** est toujours une relation à 2 arguments.
On écrit donc $=$ au lieu de $=^{r2}$.

Déclaration de symbole : Exemple

Exemple 4.3.2

- frere^{r2} est une **(r)elation** avec **2** arguments
- $*^{f2}$ est une **(f)onction** avec **2** arguments
- homme^{r1} est une **relation** unaire

Signature

Définition 4.3.4

Une signature Σ est un ensemble de déclarations de symboles.

Dans une signature donnée, on dira que le symbole s est :

1. une constante si $s^{f0} \in \Sigma$
2. un symbole de fonction à n arguments si $s^{fn} \in \Sigma$ pour un $n > 0$
3. une variable propositionnelle si $s^{r0} \in \Sigma$
4. un symbole de relation à n arguments si $s^{rn} \in \Sigma$ pour un $n > 0$

Exemples en mathématiques (1/2)

Définissons une signature pour l'arithmétique :

- Constantes $0^{f0}, 1^{f0}$
- Fonctions $+^{f2}, -^{f2}, *^{f2}$
- Relations $=^{r2}$

Remarques :

- Le contexte étant clair, on écrira plutôt 0, 1, $+$, $-$, $*$ et $=$.
- On peut cependant préciser que $-$ attend deux arguments (car il existe en version unaire).

Relation unaire : une relation à 1 argument est simplement une propriété d'un terme (par exemple ici $\textit{premier}^{r1}$).

Terme sur une signature

Définition 4.3.8

Un terme sur Σ est :

- une variable,
- une constante s (avec $s^{f0} \in \Sigma$)
- un terme de la forme $s(t_1, \ldots, t_n)$ avec
  - $n \geq 1$
  - $s^{fn} \in \Sigma$
  - $t_1, \ldots, t_n$ des termes sur Σ

L'ensemble des termes sur la signature Σ est noté T_Σ.

Formule atomique sur une signature

Définition 4.3.9

Une formule atomique sur Σ est :

- une constante $\top$ ou $\bot$
- une variable propositionnelle s (avec $s^{r0} \in \Sigma$)
- une expression de la forme $s(t_1, \ldots, t_n)$ avec
  - $n \geq 1$
  - $s^{rn} \in \Sigma$
  - $t_1, \ldots, t_n$ des termes sur Σ

Formule sur une signature

Définition 4.3.10

Une formule sur Σ est une formule dont les sous-formules atomiques sont correctes pour Σ.

Nous dénotons l'ensemble des formules sur la signature Σ par F_Σ.

Exemple 4.3.11

$\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y))$ est une formule sur $\Sigma = \{p^{r1}, q^{r2}, h^{f1}, c^{f0}\}$.

Mais c'est aussi une formule sur $\Sigma' = \{p^{r1}, q^{r2}\}$
(les symboles h et c ne figurent pas dans la formule).

Signature associée

Définition 4.3.12

La signature associée à une formule est la plus petite signature Σ telle que la formule est élément de F_Σ.

Exemple 4.3.13

La signature associée à la formule $\forall x\ (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y))$ est

$\boxed{\{p^{r1}, q^{r2}\}.}$

Signature associée

Définition 4.3.14

La signature associée à un ensemble de formules est l'union des signatures associées à chaque formule de l'ensemble.

Exemple 4.3.15

La signature associée à l'ensemble constitué des deux formules
$\forall x (p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y))$, $\quad \forall u\, \forall v\ (u + s(v) = s(u) + v)$ est

$$\boxed{\Sigma = \{p^{r1}, q^{r2}, +^{f2}, s^{f1}, =^{r2}\}.}$$

Interprétation

Définition 4.3.16

Une interprétation I sur une signature Σ est définie par :

- un domaine D non vide
- une application qui à chaque symbole $s^{gn} \in \Sigma$ associe sa valeur s_I^{gn} comme suit :

(constante)	s_I^{f0} est un élément de D
(fonction)	s_I^{fn} est une fonction de $D^n \rightarrow D$
(variable propositionnelle)	s_I^{r0} vaut 0 ou 1
(relation)	s_I^{rn} est un sous-ensemble de D^n (les n-uplets qui vérifient cette relation)

Exemple 4.3.17

Soit une relation binaire *ami* et le domaine $D = \{1, 2, 3\}$.
On considère l'interprétation I donnée par
$ami_I^{r2} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

Dans cette interprétation, on dira que la formule $ami(2, 3)$ est vraie mais que la formule $ami(2, 1)$ est fausse.

Remarque 4.3.18

Dans toute interprétation I,
la valeur du symbole $=$ est l'ensemble $\{(d, d) \mid d \in D\}$,
autrement dit le sens de l'égalité est l'identité sur le domaine D.

Exemple 4.3.19

On considère la signature suivante :

- $Anne^{f0}$, $Bernard^{f0}$ et $Claude^{f0}$: constantes
- a^{r2} : relation à deux arguments ($a(x,y)$ signifie « x aime y »)
- c^{f1} : fonction à un argument ($c(x)$ dénote le conjoint de x)

Une interprétation possible sur cette signature est l'interprétation I de domaine $D = \{0,1,2\}$ où :

- $Anne_I^{f0} = 0$, $Bernard_I^{f0} = 1$, et $Claude_I^{f0} = 2$
- $a_I^{r2} = \{(0,1),(1,0),(2,0)\}$
- c_I^{f1} est une fonction de D dans D qu'on définit par

x	0	1	2
$c_I^{f1}(x)$	1	0	2

Etat, assignation

Une interprétation définit seulement le sens de la signature (les symboles), pas celui des variables ni des formules.

Définition 4.3.21

Un état e d'une interprétation est une application de l'ensemble des variables dans le domaine D de l'interprétation.

Définition 4.3.22

Une assignation est un couple (I, e) composé d'une interprétation I et d'un état e.

Exemple 4.3.23

Soient le domaine $D = \{1, 2, 3\}$ et l'interprétation I
$ami_I^{r2} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$

L'interprétation I ne suffit pas à déterminer le sens de $ami(x, y)$.

Soit e l'état qui associe 2 à x et 1 à y.

L'assignation (I, e) rend la relation $ami(x, y)$ fausse.

Remarque 4.3.24

- Pour une formule avec des variables libres, nous avons besoin d'une assignation (I, e) dont l'état est précisé.
- Pour une formule sans variable libre, il suffit de donner une interprétation I des symboles de la formule.

  En effet (I, e) et (I, e') donneront la même valeur à toutes les formules :
  on assimile donc (I, e) et I.

Termes

Définition 4.3.25 Évaluation

Définition inductive :

1. si t est une variable, alors $[\![t]\!]_{(I,e)} = e(t)$
2. si t est une constante alors $[\![t]\!]_{(I,e)} = t_I^{f0}$
3. si $t = s(t_1, \ldots, t_n)$ avec s un symbole de fonction, alors $[\![t]\!]_{(I,e)} = s_I^{fn}([\![t_1]\!]_{(I,e)}, \ldots, [\![t_n]\!]_{(I,e)})$

Exemple 4.3.26

Soit I l'interprétation de domaine $\mathbb{N}$ qui donne aux symboles $1^{f0}, *^{f2}, +^{f2}$ leur sens usuel sur les entiers.
Soit e l'état tel que $e(x) = 2$ and $e(y) = 3$.
Calculons $[\![x * (y+1)]\!]_{(I,e)}$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} [\![x * (y+1)]\!]_{(I,e)} & = & [\![x]\!]_{(I,e)} * [\![(y+1)]\!]_{(I,e)} \\ & = & [\![x]\!]_{(I,e)} * ([\![y]\!]_{(I,e)} + [\![1]\!]_{(I,e)}) \\ & = & e(x) * (e(y) + 1) \\ & = & 2 * (3+1) = 8 \end{array}}$$

Formules

Définition 4.3.27 Sens des formules atomiques

Une formule atomique est de l'une des trois formes suivantes :

1. Une constante propositionnelle : $[\top]_{(I,e)} = 1$ et $[\bot]_{(I,e)} = 0$
2. Une variable propositionnelle : $[s]_{(I,e)} = s_I^{r0}$
3. Un terme $A = s(t_1, \ldots, t_n)$ avec s un symbole de relation :
    - si $([\![t_1]\!]_{(I,e)}, \ldots, [\![t_n]\!]_{(I,e)}) \in s_I^{rn}$ alors $[A]_{(I,e)} = 1$
    - sinon $[A]_{(I,e)} = 0$

Exemple 4.3.31

Soit l'interprétation I de domaine $D = \{1,2,3\}$ donnée par
$ami_I^{r2} = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$

Comment interpréter la formule $ami(1,2) \wedge ami(2,3) \Rightarrow ami(1,3)$ dans I ?
On sait interpréter les formules atomiques :

- $[ami(1,2)]_I = 1$
- $[ami(2,3)]_I = 1$
- $[ami(1,3)]_I = 1$

On peut alors procéder comme d'habitude avec les connecteurs, d'où
$[ami(1,2) \wedge ami(2,3) \Rightarrow ami(1,3)]_I = 1$:
Cette formule est vraie dans l'interprétation I.

Exemple 4.3.29

Considérons une signature suivante.

- $Anne^{f0}$, $Bernard^{f0}$ et $Claude^{f0}$ (constantes)
- a^{r2} : relation à deux arguments ($a(x,y)$ signifie « x aime y »)
- c^{f1} : fonction à un argument ($c(x)$ désigne le conjoint de x).

Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0,1,2\}$ sur cette signature où :

- $Anne_I^{f0} = 0$, $Bernard_I^{f0} = 1$, et $Claude_I^{f0} = 2$.
- $a_I^{r2} = \{(0,1),(1,0),(2,0)\}$.
- $c_I^{f1}(0) = 1, c_I^{f1}(1) = 0, c_I^{f1}(2) = 2$.

Exemple 4.3.29

Nous obtenons :

- $[a(Anne, Bernard)]_I =$

  $\boxed{1 \text{ car } ([\![Anne]\!]_I, [\![Bernard]\!]_I) = (0,1) \in a_I^{r2}.}$

- $[a(Anne, Claude)]_I =$

  $\boxed{0 \text{ car } ([\![Anne]\!]_I, [\![Claude]\!]_I) = (0,2) \notin a_I^{r2}.}$

Exemple 4.3.29

Soit e l'état $x = 0, y = 2$. Nous avons :

- $[a(x, c(x))]_{(I,e)} =$

  $\boxed{\begin{array}{l}\text{1 car} \\ ([\![x]\!]_{(I,e)}, [\![c(x)]\!]_{(I,e)}) = (0, c_I^{f1}([\![x]\!]_{(I,e)})) = (0, c_I^{f1}(0)) = (0, 1) \in a_I^{r2}.\end{array}}$

- $[a(y, c(y))]_{(I,e)} =$

  $\boxed{\begin{array}{l}\text{0 car} \\ ([\![y]\!]_{(I,e)}, [\![c(y)]\!]_{(I,e)}) = (2, c_I^{f1}([\![y]\!]_{(I,e)})) = (2, c_I^{f1}(2)) = (2, 2) \notin a_I^{r2}.\end{array}}$

Attention à distinguer (suivant le contexte), les éléments du domaine $0, 1$ et les valeurs de vérité $0, 1$.

Exemple 4.3.29

Nous avons :

- $[(Anne = Bernard)]_I =$

  $\boxed{0, \text{ car } ([\![Anne]\!]_I, [\![Bernard]\!]_I) = (0,1) \quad et \quad (0,1) \notin =_I^{r2}.}$

- $[(c(Anne) = Anne)]_I =$

  0, car
  $([\![c(Anne)]\!]_I, [\![Anne]\!]_I) = (c_I^{f1}([\![Anne]\!]_I), 0) = (c_I^{f1}(0), 0) = (1, 0).$

- $[(c(c(Anne)) = Anne)]_I =$

  1, car $([\![c(c(Anne))]\!]_I, [\![Anne]\!]_I) = (c_I^{f1}([\![c(Anne)]\!]_I), 0) =$
  $(c_I^{f1}(c_I^{f1}(0)), 0) = (c_I^{f1}(1), 0) = (0,0) \quad et \quad (0,0) \in =_I^{r2}.$

Aujourd'hui

- La **logique du premier ordre** est une logique pourvue de quantificateurs $\forall$ et $\exists$
- Ces quantificateurs portent sur des variables qui représentent des éléments d'un domaine
- Les **formules atomiques** sont construites à l'aide de symboles de fonctions et de relations entre éléments du domaine
- Pour interpréter une formule :
  - Les symboles doivent être interprétés dans un domaine
  - Les variables libres doivent être évaluées à l'aide d'un état

La prochaine fois

- Interprétation d'une formule du premier ordre
- Notion de modèle
- Equivalences remarquables

La prochaine fois

- Interprétation d'une formule du premier ordre
- Notion de modèle
- Equivalences remarquables

À chercher : traduire en logique du premier ordre

- Il y a des gens qui s'aiment.
- Si deux personnes s'aiment, alors elles sont conjointes.
- On ne peut pas aimer deux personnes à la fois.