Jean, Pierre et Marie par simplification

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

Jean, Pierre et Marie par simplification

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

$$\neg((p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m)) \vee m \vee p$$

$$\neg(p \Rightarrow \neg j) \vee \neg(\neg p \Rightarrow j) \vee \neg(j \Rightarrow m) \vee m \vee p$$

$$(p \wedge \neg\neg j) \vee (\neg p \wedge \neg j) \vee (j \wedge \neg m) \vee m \vee p$$

avec $x \vee (x \wedge y) \equiv x$

$$(\neg p \wedge \neg j) \vee (j \wedge \neg m) \vee m \vee p$$

avec $x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$

$$\neg j \vee j \vee m \vee p = 1$$

Exemple 1.4.9

Soit $A = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$

Déterminer si A est valide.

$\neg A$

Exemple 1.4.9

Soit $A = (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \wedge q \Rightarrow r)$

Déterminer si A est valide.

$$
\begin{array}{lll}
\neg A & & \\
\equiv (p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \wedge \neg(p \wedge q \Rightarrow r) & & \text{car } \neg(B \Rightarrow C) \equiv B \wedge \neg C \\
\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg(p \wedge q \Rightarrow r) & & \text{élim. de deux} \Rightarrow \\
\equiv (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \wedge q \wedge \neg r) & & \neg(\ldots \Rightarrow \ldots) \\
\equiv (\neg p \wedge p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge p \wedge q \wedge \neg r) & & \text{distrib. } \wedge \text{ sur } \vee \\
\quad \vee (r \wedge p \wedge q \wedge \neg r) & & \\
= 0 & & x \wedge \neg x \text{ dans chaque monôme}
\end{array}
$$

Donc $\neg A = 0$ et $A = 1$, c'est-à-dire A est valide.

Exemple 1.4.10

Soit $A = (a \Rightarrow b) \wedge c \vee (a \wedge d)$.

Déterminer si A est valide.

Exemple 1.4.10

Soit $A = (a \Rightarrow b) \wedge c \vee (a \wedge d)$.

Déterminer si A est valide.

$$
\begin{array}{ll}
\neg A & \\
= \neg((a \Rightarrow b) \wedge c) \wedge \neg(a \wedge d) & \text{(de Morgan)} \\
= (\neg(a \Rightarrow b) \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg d) & \text{(de Morgan)} \\
= ((a \wedge \neg b) \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg d) & (\neg(\ldots \Rightarrow \ldots)) \\
= (a \wedge \neg b \wedge \neg a) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg d) & \text{(distrib. } \vee \text{ sur } \wedge\text{)} \\
\quad \vee(\neg c \wedge \neg a) \vee (\neg c \wedge \neg d) & \\
= (a \wedge \neg b \wedge \neg d) \vee (\neg c \wedge \neg a) \vee (\neg c \wedge \neg d) & \text{(1er monôme contradictoire)}
\end{array}
$$

On obtient 3 modèles de $\neg A$: $(a = 1, b = 0, d = 0)$, $(a = 0, c = 0)$,
$(c = 0, d = 0)$.
C'est-à-dire, des contre-modèles de A.
Donc A n'est pas valide.