Transformation d’une formule logique

Benjamin Wack

Université Grenoble Alpes

Au dernier cours

- Pourquoi la logique formelle ?
- Logique propositionnelle
- Syntaxe
- Sens des formules

Notre exemple avec une table de vérité

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

Notre exemple avec une table de vérité

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

p	j	m	$p \Rightarrow \neg j$	$\neg p \Rightarrow j$	$j \Rightarrow m$	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$	$m \vee p$	$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \Rightarrow C$
0	0	0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Plan

Conséquence

Equivalences remarquables

Substitution et remplacement

Formes normales

Conclusion

Plan

Conséquence

Equivalences remarquables

Substitution et remplacement

Formes normales

Conclusion

Conséquence

Définition 1.2.24

A est conséquence de l'ensemble Γ d'hypothèses ($\Gamma \models A$) si tout modèle de Γ est modèle de A.

Remarque 1.2.26

$\models A$ signifie donc bien que A est valide.
(Toute assignation est modèle de l'ensemble vide.)

Exemple de Conséquence

Exemple 1.2.28

$a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \models a \Rightarrow c$.

Exemple de Conséquence

Exemple 1.2.28

$a \Rightarrow b, b \Rightarrow c \models a \Rightarrow c$.

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Propriété INCONTOURNABLE

Constamment utilisée dans les exercices et examens.

Propriété 1.2.27

Soit $H_n = A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.
Les trois formulations suivantes sont équivalentes :

1. $A_1, \ldots, A_n \models B$
2. $H_n \Rightarrow B$ est valide.
3. $H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable.

Démonstration.

Elle se base sur les tables de vérité des connecteurs.
On procède en démontrant que $1 \Rightarrow 2$ puis $2 \Rightarrow 3$ et $3 \Rightarrow 1$. $\square$

Preuve (1/3)

- $1 \Rightarrow 2$: supposons que $A_1, \ldots, A_n \models B$.

Soit une assignation v :

- si v n'est pas modèle de $A_1, \ldots, A_n$:
  pour un certain i on a $[A_i]_v = 0$, d'où $[H_n]_v = 0$.
  Ainsi $[H_n \Rightarrow B]_v = 1$.
- si v est modèle de $A_1, \ldots, A_n$:
  alors par hypothèse v est un modèle de B donc $[B]_v = 1$.
  Ainsi $[H_n \Rightarrow B]_v = 1$.

Donc $H_n \Rightarrow B$ est valide.

Preuve (2/3)

- $2 \Rightarrow 3$: supposons que $H_n \Rightarrow B$ est valide.
  Pour toute assignation v on a alors :
  - soit $[H_n]_v = 0$,
  - soit $[H_n]_v = 1$ et $[B]_v = 1$.

  Or $[H_n \wedge \neg B]_v = \min([H_n]_v, [\neg B]_v) = \min([H_n]_v, 1 - [B]_v)$.

  Dans les deux cas, nous obtenons $[H_n \wedge \neg B]_v = 0$.
  Donc $H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable.

Preuve (3/3)

- $3 \Rightarrow 1$: supposons que $H_n \wedge \neg B$ est insatisfaisable.
  Montrons que $A_1, \ldots, A_n \models B$.

> Soit v un modèle de $A_1, \ldots, A_n$:
>
> - $[H_n]_v = [A_1 \wedge \ldots \wedge A_n]_v = 1$.
> - D'après notre hypothèse $[\neg B]_v = 0$.
>   D'où $1 - [B]_v = 0$ et donc $[B]_v = 1$: v est un modèle de B.

La validité du raisonnement par implications circulaires sera démontrée en exercice.

Illustration de la propriété

Exemple 1.2.28

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge \neg(a \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1		
0	0	1	1	1	1		
0	1	0	1	0	1		
0	1	1	1	1	1		
1	0	0	0	1	0		
1	0	1	0	1	1		
1	1	0	1	0	0		
1	1	1	1	1	1		

Illustration de la propriété

Exemple 1.2.28

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge \neg(a \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	0	1	0	1	1	
0	1	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	1	
1	0	1	0	1	1	1	
1	1	0	1	0	0	1	
1	1	1	1	1	1	1	

Illustration de la propriété

Exemple 1.2.28

a	b	c	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow c$	$a \Rightarrow c$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \wedge \neg(a \Rightarrow c)$
0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1	0

Plan

Conséquence

Equivalences remarquables

Substitution et remplacement

Formes normales

Conclusion

Préambule

Comment prouver qu'une formule est valide ?

Préambule

Comment prouver qu'une formule est valide ?

- Table de vérité
  - Problème : pour une formule à 100 variables, la table de vérité aura 2^{100} lignes (non calculable même par un ordinateur !).

Préambule

Comment prouver qu'une formule est valide ?

- Table de vérité
  - Problème : pour une formule à 100 variables, la table de vérité aura 2^{100} lignes (non calculable même par un ordinateur !).
- Idée :
  - Simplifier la formule en utilisant des règles de calcul
  - Puis étudier la formule simplifiée en utilisant les tables de vérités ou un raisonnement logique

La disjonction

- associative $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$
- commutative $x \vee y \equiv y \vee x$
- idempotente $x \vee x \equiv x$

Idem pour la conjonction.

Distributivité

- La conjonction est distributive sur la disjonction
  $x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- La disjonction est distributive sur la conjonction
  $x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Neutralité et Absorption

- 0 est l'élément neutre de la disjonction $0 \vee x \equiv x$
- 1 est l'élément neutre de la conjonction $1 \wedge x \equiv x$
- 1 est l'élément absorbant de la disjonction $1 \vee x \equiv 1$
- 0 est l'élément absorbant de la conjonction $0 \wedge x \equiv 0$

Négation

- Les lois de la négation :
  - $x \wedge \neg x \equiv 0$
  - $x \vee \neg x \equiv 1$ (Le tiers-exclus)
- $\neg\neg x \equiv x$
- $\neg 0 \equiv 1$
- $\neg 1 \equiv 0$

Les lois de De Morgan

- $\neg(x \wedge y) \equiv \neg x \vee \neg y$
- $\neg(x \vee y) \equiv \neg x \wedge \neg y$

Lois de simplification

Propriété 1.2.31

Pour tout x, y nous avons :

- $x \vee (x \wedge y) \equiv x$
- $x \wedge (x \vee y) \equiv x$
- $x \vee (\neg x \wedge y) \equiv x \vee y$

Plan

Conséquence

Equivalences remarquables

Substitution et remplacement

Formes normales

Conclusion

Définitions

Définition 1.4.1

- Un littéral est une variable ou la négation d'une variable.
- Un monôme est une conjonction de littéraux.
- Une clause est une disjonction de littéraux.
  (cas particuliers : 0 et 1)

Exemple 1.4.2

- $x, y, \neg z$ sont des littéraux.
- $x \wedge \neg y \wedge z$ est un monôme
- Le monôme $x \wedge \neg y \wedge z \wedge \neg x$ comporte x et $\neg x$: il vaut 0.
- $x \vee \neg y \vee z$ est une clause
- La clause $x \vee \neg y \vee z \vee \neg x$ comporte x et $\neg x$: elle vaut 1.

Forme normale

Definition 1.4.3

Formule en forme normale = seulement $\wedge, \vee$ et des négations sur les variables.

Exemple 1.4.4

La formule $\neg a \vee b$ est en forme normale.
$a \Rightarrow b$ est équivalente mais n'est pas en forme normale.

Toute formule admet une forme normale équivalente.

Mise en forme normale

1. **Élimination des équivalences**

2. **Élimination des implications**

3. **Déplacement des négations vers les variables**

Mise en forme normale

1. **Élimination des équivalences**
   Remplacer $A \Leftrightarrow B$ par
   (a) $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
   OU
   (b) $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
2. **Élimination des implications**
   Remplacer $A \Rightarrow B$ par $\neg A \vee B$
3. **Déplacement des négations vers les variables**
   Remplacer
   (a) $\neg\neg A$ par A
   (b) $\neg(A \vee B)$ par $\neg A \wedge \neg B$
   (c) $\neg(A \wedge B)$ par $\neg A \vee \neg B$

Remarque 1.4.5 : simplifications

Simplifier le plus tôt possible :

1. Remplacer $\neg(A \Rightarrow B)$ par $A \wedge \neg B$
2. Remplacer une conjonction par 0 si elle comporte une formule et sa négation
3. Remplacer une disjonction par 1 si elle comporte une formule et sa négation
4. Appliquer :
   - l'idempotence de la conjonction et de la disjonction,
   - le caractère neutre ou absorbant de 0 et de 1,
   - remplacer $\neg 1$ par 0 et $\neg 0$ par 1.
5. Appliquer les simplifications :
   - $x \vee (x \wedge y) = x$,
   - $x \wedge (x \vee y) = x$,
   - $x \vee (\neg x \wedge y) = x \vee y$

Forme normale disjonctive

Définition 1.4.6

Une formule est en forme normale disjonctive (FND) si et seulement si elle est une disjonction (somme) de monômes.

Méthode : distribuer les conjonctions sur les disjonctions
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
L'intérêt des FND est de mettre en évidence les modèles.

Forme normale disjonctive

Définition 1.4.6

Une formule est en forme normale disjonctive (FND) si et seulement si elle est une disjonction (somme) de monômes.

Méthode : distribuer les conjonctions sur les disjonctions
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
L'intérêt des FND est de mettre en évidence les modèles.

Exemple 1.4.7

$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$ est une FND, qui a deux modèles principaux :

Forme normale disjonctive

Définition 1.4.6

Une formule est en forme normale disjonctive (FND) si et seulement si elle est une disjonction (somme) de monômes.

Méthode : distribuer les conjonctions sur les disjonctions
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
L'intérêt des FND est de mettre en évidence les modèles.

Exemple 1.4.7

$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z)$ est une FND, qui a deux modèles principaux :

- $x = 1, y = 1$
- $x = 0, y = 0, z = 1$

Forme normale conjonctive

Définition 1.4.11

Une formule est en forme normale conjonctive (FNC) si et seulement si elle est une conjonction (produit) de clauses.

Appliquer la distributivité (!) de la disjonction sur la conjonction :

- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

L'intérêt des FNC est de mettre en évidence les contre-modèles.

Forme normale conjonctive

Définition 1.4.11

Une formule est en forme normale conjonctive (FNC) si et seulement si elle est une conjonction (produit) de clauses.

Appliquer la distributivité (!) de la disjonction sur la conjonction :

- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

L'intérêt des FNC est de mettre en évidence les contre-modèles.

Exemple 1.4.12

$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$ est une FNC, qui a deux contre-modèles

Forme normale conjonctive

Définition 1.4.11

Une formule est en forme normale conjonctive (FNC) si et seulement si elle est une conjonction (produit) de clauses.

Appliquer la distributivité (!) de la disjonction sur la conjonction :

- $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

L'intérêt des FNC est de mettre en évidence les contre-modèles.

Exemple 1.4.12

$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$ est une FNC, qui a deux contre-modèles

- $x = 0, y = 0$
- $x = 1, y = 1, z = 0.$

Utilisée en modélisation (SAT-solvers)