Introduction à la logique

Benjamin Wack (benjamin.wack@imag.fr)

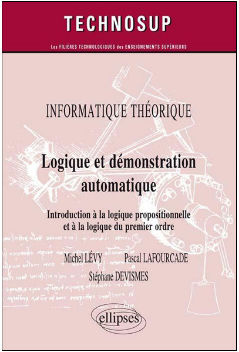
Notes de cours par

Stéphane Devismes Pascal Lafourcade Michel Lévy

Université Grenoble Alpes

Matériel

- Poly (à trous)



Plan

Plan

Logique

Définitions

- La logique précise ce qu’est un raisonnement correct, indépendamment du domaine d’application.

Logique

Définitions

- La logique précise ce qu'est un raisonnement correct, indépendamment du domaine d'application.
- Un raisonnement est un moyen d'obtenir une conclusion à partir d'hypothèses données.

Logique

Définitions

- La logique précise ce qu'est un raisonnement correct, indépendamment du domaine d'application.
- Un raisonnement est un moyen d'obtenir une conclusion à partir d'hypothèses données.
- Un raisonnement correct ne dit rien sur la vérité des hypothèses, il dit seulement que **de la vérité des hypothèses, on peut déduire la vérité de la conclusion**.

Exemples

Exemple I

- **Hypothèse I :** Tous les hommes sont mortels
- **Hypothèse II :** Socrate est un homme
- **Conclusion :** Socrate est mortel

Exemples

Exemple I

- **Hypothèse I :** Tous les hommes sont mortels
- **Hypothèse II :** Socrate est un homme
- **Conclusion :** Socrate est mortel

Exemple II

- **Hypothèse I :** Tout ce qui est rare est cher
- **Hypothèse II :** Un cheval bon marché est rare
- **Conclusion :** Un cheval bon marché est cher !

Ajout d’une hypothèse

Ajout d'une hypothèse

Exemple III

- **Hypothèse I :** Tout ce qui est rare est cher
- **Hypothèse II :** Un cheval bon marché est rare
- **Hypothèse III :** Tout ce qui est bon marché n'est pas cher

Ajout d'une hypothèse

Exemple III

- **Hypothèse I :** Tout ce qui est rare est cher
- **Hypothèse II :** Un cheval bon marché est rare
- **Hypothèse III :** Tout ce qui est bon marché n'est pas cher
- **Conclusion :** Hypothèses contradictoires ! Car :
  - **Hypothèse I + hypothèse II :** Un cheval bon marché est cher
  - **Hypothèse III :** Un cheval bon marché n'est pas cher

Petit historique. . .

- **George Boole** (1815-1864)
  - *logique symbolique* : s'éloigne de la langue naturelle
- **Gottlob Frege** (1848-1925)
  - *calcul propositionnel* : formalisation des règles de raisonnement
  - *théorie de la démonstration* : démonstration = objet d'étude
- **Bertrand Russell** (1872-1970)
  - *logicisme* : programme de formalisation des mathématiques
  - *paradoxe* dans les premiers systèmes proposés
- **Kurt Gödel** (1906-1978)
  - *complétude* du calcul des prédicats du premier ordre
  - *théorème d'incomplétude* des systèmes incluant $\mathbb{N}$
- **Alonzo Church** (1903-1995)
  - *lambda-calcul* : représentation calculatoire des démonstrations

Applications

- **Hardware** (portes logique)
- **Vérification et correction des programmes** :
  - prouveurs COQ, PVS, Prover9, MACE, . . .
  - applications industrielles (Meteor, Airbus...)
- **Intelligence artificielle** :
  - système expert (*MyCin*), ontologie
- **Programmation** : Prolog
  - intelligence artificielle
  - traitement de la langue
- **Preuves mathématiques**, **Sécurité**, **. . .**

Objectifs du cours

- Modéliser et formaliser un problème décrit en langage naturel.

Objectifs du cours

- Modéliser et formaliser un problème décrit en langage naturel.
- Comprendre un raisonnement présenté sous forme symbolique, en particulier être capable de déterminer s'il est correct.

Objectifs du cours

- Modéliser et formaliser un problème décrit en langage naturel.
- Comprendre un raisonnement présenté sous forme symbolique, en particulier être capable de déterminer s'il est correct.
- Démontrer, c'est-à-dire construire un raisonnement correct utilisant les règles et/ou les algorithmes de la logique propositionnelle et du premier ordre.

Objectifs du cours

- Modéliser et formaliser un problème décrit en langage naturel.
- Comprendre un raisonnement présenté sous forme symbolique, en particulier être capable de déterminer s'il est correct.
- Démontrer, c'est-à-dire construire un raisonnement correct utilisant les règles et/ou les algorithmes de la logique propositionnelle et du premier ordre.
- Écrire une preuve rigoureuse, en particulier par récurrence.

Plan

Logique propositionnelle

Définition

La logique propositionnelle est la logique *sans quantificateurs*.
Seules opérations logiques considérées :

- $\neg$ (négation)
- $\wedge$ (conjonction “et”)
- $\vee$ (disjonction “ou”)
- $\Rightarrow$ (implication)
- $\Leftrightarrow$ (équivalence)

Exemple : **Raisonnement formel**

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

Exemple : **Raisonnement formel**

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

- p : "Pierre est grand"
- j : "Jean est le fils de Pierre"
- m : "Marie est la soeur de Jean"

Exemple : **Raisonnement formel**

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

- p : "Pierre est grand"
- j : "Jean est le fils de Pierre"
- m : "Marie est la soeur de Jean"

- (H1) : $p \Rightarrow \neg j$
- (H2) : $\neg p \Rightarrow j$
- (H3) : $j \Rightarrow m$
- (C) : $m \vee p$

Exemple : **Raisonnement formel**

Hypothèses :

- (H1) : Si Pierre est grand, alors Jean n'est pas le fils de Pierre
- (H2) : Si Pierre n'est pas grand, alors Jean est le fils de Pierre
- (H3) : Si Jean est le fils de Pierre alors Marie est la soeur de Jean

Conclusion (C) : Marie est la soeur de Jean ou Pierre est grand.

- p : "Pierre est grand"
- j : "Jean est le fils de Pierre"
- m : "Marie est la soeur de Jean"

- (H1) : $p \Rightarrow \neg j$
- (H2) : $\neg p \Rightarrow j$
- (H3) : $j \Rightarrow m$
- (C) : $m \vee p$

Il s'agira de montrer que $H1 \wedge H2 \wedge H3 \Rightarrow C$:

$$(p \Rightarrow \neg j) \wedge (\neg p \Rightarrow j) \wedge (j \Rightarrow m) \Rightarrow m \vee p$$

est vraie quelque soit la valeur de vérité des propositions p, j, m.

Plan

Vocabulaire du langage

- Les constantes : $\top$ (vrai) et $\bot$ (faux)
- Les variables : par exemple x, y_1
- Les parenthèses
- Les connecteurs : $\neg, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

Formule (stricte)

Définition 1.1.1

Une formule stricte est définie de manière **inductive** par :

- $\top$ et $\bot$ sont des formules strictes.
- Une variable est une formule stricte.
- Si A est une formule stricte alors $\neg A$ est une formule stricte.
- Si A et B sont des formules strictes et si $\circ$ est une des opérations $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alors $(A \circ B)$ est une formule stricte.

Formule (stricte)

Définition 1.1.1

Une formule stricte est définie de manière **inductive** par :

- $\top$ et $\bot$ sont des formules strictes.
- Une variable est une formule stricte.
- Si A est une formule stricte alors $\neg A$ est une formule stricte.
- Si A et B sont des formules strictes et si $\circ$ est une des opérations $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ alors $(A \circ B)$ est une formule stricte.

Exemple 1.1.2

$(a \vee (\neg b \wedge c))$ est une formule stricte, mais pas $a \vee (\neg b \wedge c)$, ni $(a \vee (\neg(b) \wedge c))$.

Arbre

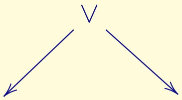
Exemple 1.1.3

La structure de la formule $(a \vee (\neg b \wedge c))$ est mise en évidence par l'arbre suivant :

Arbre

Exemple 1.1.3

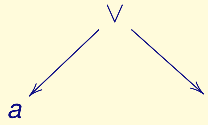
La structure de la formule $(a \vee (\neg b \wedge c))$ est mise en évidence par l'arbre suivant :



Arbre

Exemple 1.1.3

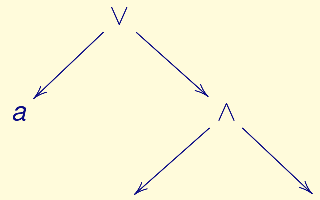
La structure de la formule $(a \vee (\neg b \wedge c))$ est mise en évidence par l'arbre suivant :



Arbre

Exemple 1.1.3

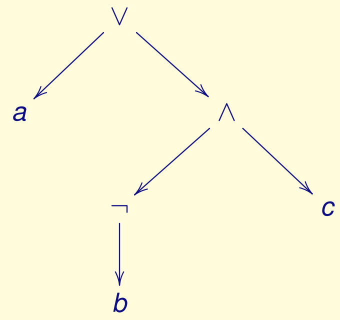
La structure de la formule $(a \vee (\neg b \wedge c))$ est mise en évidence par l'arbre suivant :



Arbre

Exemple 1.1.3

La structure de la formule $(a \vee (\neg b \wedge c))$ est mise en évidence par l'arbre suivant :

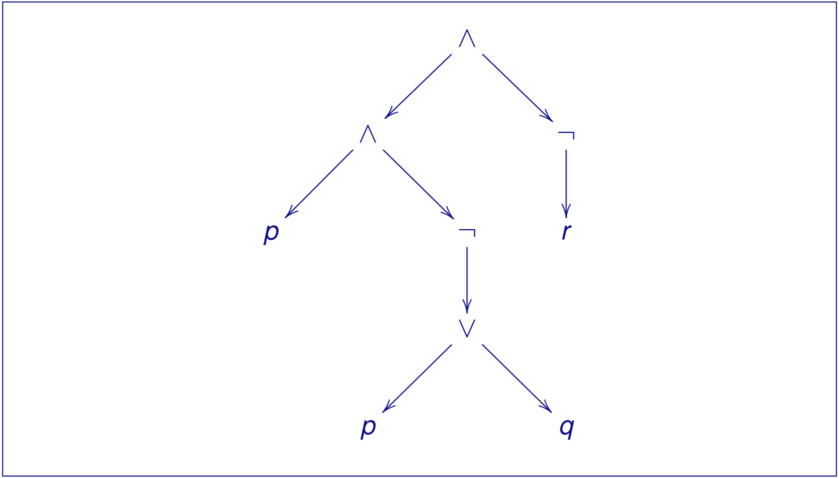


Exercice

$$((p \wedge \neg(p \vee q)) \wedge \neg r)$$

Exercice

$$((p \wedge \neg(p \vee q)) \wedge \neg r)$$



Taille d'une formule

Définition 1.1.10

La taille d'une formule A, notée $|A|$, est définie inductivement par :

- $|\top| = 0$ et $|\bot| = 0$.
- Si A est une variable alors $|A| = 0$.
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|(A \circ B)| = |A| + |B| + 1$.

Taille d'une formule

Définition 1.1.10

La taille d'une formule A, notée $|A|$, est définie inductivement par :

- $|\top| = 0$ et $|\bot| = 0$.
- Si A est une variable alors $|A| = 0$.
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|(A \circ B)| = |A| + |B| + 1$.

Exemple 1.1.11

$|(a \vee (\neg b \wedge c))| =$

Taille d'une formule

Définition 1.1.10

La taille d'une formule A, notée $|A|$, est définie inductivement par :

- $|\top| = 0$ et $|\bot| = 0$.
- Si A est une variable alors $|A| = 0$.
- $|\neg A| = 1 + |A|$.
- $|(A \circ B)| = |A| + |B| + 1$.

Exemple 1.1.11

$|(a \vee (\neg b \wedge c))| =$

3.

Premier résultat

Les formules strictes se décomposent de manière unique en leurs sous-formules.

Théorème 1.1.13

Toute formule A s'écrit sous une et une seule de ces formes :

- une variable,
- une constante,
- $\neg B$ où B est une formule,
- $(B \circ C)$ où B et C sont des formules et $\circ$ un connecteur binaire.

Ce qui autorise :

- la démonstration *par cas*
- la récurrence sur la *structure* des formules et non sur leur taille.

Formule à priorité

Définition 1.1.14

Idem mais :

- si A et B sont des formules à priorité alors $A \circ B$ est une formule à priorité,
- si A est une formule à priorité alors (A) est une formule à priorité.

Exemple 1.1.15

$a \vee \neg b \wedge c$ est une formule à priorité mais pas une formule (stricte).

Règles de priorité

Définition 1.1.16

Par ordre de priorités décroissantes : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$.

Associativité à gauche

Pour deux connecteurs identiques $A \circ B \circ C \ = \ (A \circ B) \circ C$
sauf pour l'implication : $A \Rightarrow B \Rightarrow C \ = \ A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

Exemples de formules à priorité

Exemple 1.1.17

- $a \wedge b \wedge c$ est l'abréviation de
- $a \wedge b \vee c$ est l'abréviation de
- $a \vee b \wedge c$ est l'abréviation de

Exemples de formules à priorité

Exemple 1.1.17

- $a \wedge b \wedge c$ est l'abréviation de
  $\boxed{((a \wedge b) \wedge c)}$
- $a \wedge b \vee c$ est l'abréviation de
- $a \vee b \wedge c$ est l'abréviation de

Exemples de formules à priorité

Exemple 1.1.17

- $a \wedge b \wedge c$ est l'abréviation de

  $\boxed{((a \wedge b) \wedge c)}$

- $a \wedge b \vee c$ est l'abréviation de

  $\boxed{((a \wedge b) \vee c)}$

- $a \vee b \wedge c$ est l'abréviation de

Exemples de formules à priorité

Exemple 1.1.17

- $a \wedge b \wedge c$ est l'abréviation de

  $\boxed{((a \wedge b) \wedge c)}$

- $a \wedge b \vee c$ est l'abréviation de

  $\boxed{((a \wedge b) \vee c)}$

- $a \vee b \wedge c$ est l'abréviation de

  $\boxed{(a \vee (b \wedge c))}$

Plan

Assignation d'une formule

Définition 1.2.1

Une assignation est une fonction qui,
à chaque variable d'une formule, associe une valeur dans $\{0, 1\}$.

$[A]_v$ dénote la valeur de la formule A dans l'assignation v.

Assignation d'une formule

Définition 1.2.1

Une assignation est une fonction qui,
à chaque variable d'une formule, associe une valeur dans $\{0, 1\}$.

$[A]_v$ dénote la valeur de la formule A dans l'assignation v.

Exemple : Soit v une assignation telle que $v(x) = 0$ et $v(y) = 1$.
Appliquer v à $x \vee y$ s'écrit

Assignation d'une formule

Définition 1.2.1

Une assignation est une fonction qui,
à chaque variable d'une formule, associe une valeur dans $\{0, 1\}$.

$[A]_v$ dénote la valeur de la formule A dans l'assignation v.

Exemple : Soit v une assignation telle que $v(x) = 0$ et $v(y) = 1$.
Appliquer v à $x \vee y$ s'écrit $[x \vee y]_v$
$[x \vee y]_v =$

Assignation d'une formule

Définition 1.2.1

Une assignation est une fonction qui,
à chaque variable d'une formule, associe une valeur dans $\{0, 1\}$.

$[A]_v$ dénote la valeur de la formule A dans l'assignation v.

Exemple : Soit v une assignation telle que $v(x) = 0$ et $v(y) = 1$.
Appliquer v à $x \vee y$ s'écrit $[x \vee y]_v$
$[x \vee y]_v = 0 \vee 1 = 1$
Conclusion :

Assignation d'une formule

Définition 1.2.1

Une assignation est une fonction qui,
à chaque variable d'une formule, associe une valeur dans $\{0, 1\}$.

$[A]_v$ dénote la valeur de la formule A dans l'assignation v.

Exemple : Soit v une assignation telle que $v(x) = 0$ et $v(y) = 1$.
Appliquer v à $x \vee y$ s'écrit $[x \vee y]_v$
$[x \vee y]_v = 0 \vee 1 = 1$
Conclusion : $x \vee y$ est vrai pour l'assignation v

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v =$
- $[\top]_v =$, $[\bot]_v =$
- $[\neg A]_v =$
- $[(A \vee B)]_v =$
- $[(A \wedge B)]_v =$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = \quad , [\bot]_v =$
- $[\neg A]_v =$
- $[(A \vee B)]_v =$
- $[(A \wedge B)]_v =$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v =$
- $[\neg A]_v =$
- $[(A \vee B)]_v =$
- $[(A \wedge B)]_v =$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v = 0$
- $[\neg A]_v =$
- $[(A \vee B)]_v =$
- $[(A \wedge B)]_v =$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v = 0$
- $[\neg A]_v = 1 - [A]_v$
- $[(A \vee B)]_v =$
- $[(A \wedge B)]_v =$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v = 0$
- $[\neg A]_v = 1 - [A]_v$
- $[(A \vee B)]_v = max\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \wedge B)]_v =$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v = 0$
- $[\neg A]_v = 1 - [A]_v$
- $[(A \vee B)]_v = max\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \wedge B)]_v = min\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v = 0$
- $[\neg A]_v = 1 - [A]_v$
- $[(A \vee B)]_v = max\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \wedge B)]_v = min\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$ si $[A]_v = 0$ alors 1 sinon $[B]_v$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$

Valeur d'une formule

Définition 1.2.2

Soient A, B des formules, x une variable et v une assignation.

- $[x]_v = v(x)$
- $[\top]_v = 1$, $[\bot]_v = 0$
- $[\neg A]_v = 1 - [A]_v$
- $[(A \vee B)]_v = max\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \wedge B)]_v = min\{[A]_v, [B]_v\}$
- $[(A \Rightarrow B)]_v =$ si $[A]_v = 0$ alors 1 sinon $[B]_v$
- $[(A \Leftrightarrow B)]_v =$ si $[A]_v = [B]_v$ alors 1 sinon 0

Table de vérité

Définition 1.2.3

Une table de vérité donne la valeur d'une formule pour **chaque** choix de valeurs des variables de A.

- une ligne de la table de vérité = une assignation
- une colonne = toutes les valeurs d'une formule.

Tables de base

On associe à chaque formule une *valeur* : 0 (faux) ou 1 (vrai).
La constante $\top$ vaut 1 et la constante $\perp$ vaut 0.

Table 1.1 (table de vérité des connecteurs)

x	y	$\neg x$	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \Rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Exemple :

Exemple 1.2.4

Donner la table de vérité des formules suivantes.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$	$x \vee \neg y$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

Exemple :

Exemple 1.2.4

Donner la table de vérité des formules suivantes.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$	$x \vee \neg y$
0	0	1	1			
0	1	1	1			
1	0	0	0			
1	1	1	0			

Exemple :

Exemple 1.2.4

Donner la table de vérité des formules suivantes.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$	$x \vee \neg y$
0	0	1	1	1		
0	1	1	1	1		
1	0	0	0	0		
1	1	1	0	1		

Exemple :

Exemple 1.2.4

Donner la table de vérité des formules suivantes.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$	$x \vee \neg y$
0	0	1	1	1	1	
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	1	
1	1	1	0	1	1	

Exemple :

Exemple 1.2.4

Donner la table de vérité des formules suivantes.

x	y	$x \Rightarrow y$	$\neg x$	$\neg x \vee y$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$	$x \vee \neg y$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Formules équivalentes

Définition 1.2.5

Deux formules A et B sont équivalentes (noté $A \equiv B$ ou simplement $A = B$) si elles ont la même valeur pour toute assignation.

Formules équivalentes

Définition 1.2.5

Deux formules A et B sont équivalentes (noté $A \equiv B$ ou simplement $A = B$) si elles ont la même valeur pour toute assignation.

Exemple 1.2.6

$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$

Formules équivalentes

Définition 1.2.5

Deux formules A et B sont équivalentes (noté $A \equiv B$ ou simplement $A = B$) si elles ont la même valeur pour toute assignation.

Exemple 1.2.6

$x \Rightarrow y \equiv \neg x \vee y$

Remarque :
Le connecteur logique $\Leftrightarrow$ ne signifie pas $A \equiv B$.

Valide, tautologie (1/2)

Définition 1.2.8

- Une formule est valide si elle a la valeur 1 pour toute assignation.
- Aussi appelée une tautologie.
- Noté $\models A$.

Valide, tautologie (1/2)

Définition 1.2.8

- Une formule est valide si elle a la valeur 1 pour toute assignation.
- Aussi appelée une tautologie.
- Noté $\models A$.

Exemple 1.2.9

- $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg x \vee y)$ est valide ;
- $x \Rightarrow y$ n'est pas valide car

elle est fausse pour $x = 1$ et $y = 0$.

Valide, tautologie (2/2)

Propriété 1.2.10

Les formules A et B sont équivalentes ($A \equiv B$)
si et seulement si
la formule $A \Leftrightarrow B$ est valide.

Cf table de vérité de $\Leftrightarrow$.

Modèle d'une formule

Définition 1.2.11

Une assignation v qui donne la valeur 1 à une formule est un modèle de cette formule.

On dit aussi que v satisfait A ou v rend A vraie.

Exemple 1.2.12

Un modèle de $x \Rightarrow y$ est :

Modèle d'une formule

Définition 1.2.11

Une assignation v qui donne la valeur 1 à une formule est un modèle de cette formule.

On dit aussi que v satisfait A ou v rend A vraie.

Exemple 1.2.12

Un modèle de $x \Rightarrow y$ est :

$x = 1, y = 1$ (il y en a d'autres).

Modèle d'une formule

Définition 1.2.11

Une assignation v qui donne la valeur 1 à une formule est un modèle de cette formule.

On dit aussi que v satisfait A ou v rend A vraie.

Exemple 1.2.12

Un modèle de $x \Rightarrow y$ est :

$x = 1, y = 1$ (il y en a d'autres).

Par contre $x = 1, y = 0$ n'est pas un modèle de $x \Rightarrow y$.

Modèle d'un ensemble de formules

Définition 1.2.13

v est un modèle de l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$
si et seulement si
elle est un modèle de chacune de ces formules.

Modèle d'un ensemble de formules

Définition 1.2.13

v est un modèle de l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$
si et seulement si
elle est un modèle de chacune de ces formules.

Exemple 1.2.14

Un modèle de $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c\}$ est :

Modèle d'un ensemble de formules

Définition 1.2.13

v est un modèle de l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$
si et seulement si
elle est un modèle de chacune de ces formules.

Exemple 1.2.14

Un modèle de $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c\}$ est :

$\boxed{a = 0, b = 0 \text{ (et } c \text{ quelconque).}}$

Propriété d'un modèle d'un ensemble de formules

Propriété 1.2.15

v est un modèle de $\{A_1, \ldots, A_n\}$
si et seulement si
v est un modèle de $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Propriété d'un modèle d'un ensemble de formules

Propriété 1.2.15

v est un modèle de $\{A_1, \ldots, A_n\}$
si et seulement si
v est un modèle de $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Exemple 1.2.16

L'ensemble de formules $\{a \Rightarrow b, b \Rightarrow c\}$
et la formule $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$
ont les mêmes modèles.

Contre-modèle

Définition 1.2.17

Une assignation v qui donne la valeur 0 à A est un contre-modèle de A.

On dit que v ne satisfait pas A ou que v rend la formule fausse.

Contre-modèle

Définition 1.2.17

Une assignation v qui donne la valeur 0 à A est un contre-modèle de A.

On dit que v ne satisfait pas A ou que v rend la formule fausse.

Exemple 1.2.18

Un contre-modèle de $x \Rightarrow y$ est :

Contre-modèle

Définition 1.2.17

Une assignation v qui donne la valeur 0 à A est un contre-modèle de A.

On dit que v ne satisfait pas A ou que v rend la formule fausse.

Exemple 1.2.18

Un contre-modèle de $x \Rightarrow y$ est :

$\boxed{x = 1, y = 0.}$

Formule satisfaisable

Définition 1.2.20

Un (ensemble de) formule(s) est satisfaisable s'il admet un modèle.

Définition 1.2.21

Un (ensemble de) formule(s) est insatisfaisable s'il n'est pas satisfaisable.

Formule satisfaisable

Définition 1.2.20

Un (ensemble de) formule(s) est satisfaisable s'il admet un modèle.

Définition 1.2.21

Un (ensemble de) formule(s) est insatisfaisable s'il n'est pas satisfaisable.

Exemple 1.2.22

$x \wedge \neg x$ est insatisfaisable, mais $x \Rightarrow y$ est satisfaisable.

Formule satisfaisable

Définition 1.2.20

Un (ensemble de) formule(s) est satisfaisable s'il admet un modèle.

Définition 1.2.21

Un (ensemble de) formule(s) est insatisfaisable s'il n'est pas satisfaisable.

Exemple 1.2.22

$x \wedge \neg x$ est insatisfaisable, mais $x \Rightarrow y$ est satisfaisable.

Attention

insatisfaisable = 0 modèle	satisfaisable = 1 modèle ou plus
invalide = 1 contre-modèle ou plus	valide = 0 contre-modèle

Plan

Aujourd'hui

- Pourquoi définir et utiliser la logique formelle ?
- Formules de logique propositionnelle :
  - 1 variable = 1 proposition (une information) vraie ou fausse
  - 5 connecteurs pour articuler ces propositions
- Sens des formules :
  - assignation = choix d'une valeur de vérité pour chaque variable
  - une formule peut être vraie pour 0, 1, plusieurs ou toutes les assignations

La prochaine fois

Exercice : étudier “Pierre, Jean et Marie” à l’aide des tables de vérité.

- Équivalences remarquables
- Substitutions et remplacements
- Formes normales