

Université de La Réunion

Licence d'informatique – L3 – Mars 2023

U.E. Logiques – CTE

Durée : 60 minutes (80 minutes si tiers temps) – sans document ni moyen électronique

Répondre uniquement dans les cadres prévus à cet effet. La gestion de l'espace fait partie de l'épreuve.

1	
2	
3	
4	

Nom :

Signature :

Prénom(s) :

Exercice 1 : (5 ●) Soient H_1, \dots, H_n, C des formules de logique du premier ordre. On note $H_1, \dots, H_n \models C$ le fait que C est une conséquence logique de H_1, \dots, H_n et $H_1, \dots, H_n \vdash C$ une preuve en déduction naturelle de C à partir des hypothèses H_1, \dots, H_n .

Dans ce contexte, que signifie "la déduction naturelle est une méthode de preuve *correcte* pour la logique du premier ordre" ?

Dans ce contexte, que signifie "la déduction naturelle est une méthode de preuve *complète* pour la logique du premier ordre" ?

Exercice 2 : (5 ●) On se place dans le cadre de la logique du premier ordre. On considère la signature $\Sigma = \{P^{r1}, Q^{r1}, R^{r1}, =^{r2}\}$. Soit I l'interprétation de domaine $D = \{0, 1, 2\}$ telle que : $P_I = \{1\}$, $Q_I = \{1, 2\}$, $R_I = \{0\}$. L'égalité est évaluée comme telle. Dans cette interprétation, évaluez (vrai/faux, en justifiant brièvement) les formules suivantes :

$$\forall x \neg R(x)$$

$$\exists x \neg R(x)$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\forall x (Q(x) \rightarrow P(x))$$

$$\forall x (P(x) \vee Q(x))$$

<p>Rule of &I</p> <p>j p : k q : p & q j,k &I</p>	<p>Rule of &E</p> <p>j p & q : p j &E</p>	<p>Rule of \veeI</p> <p>j p : p \vee q j \veeI</p>
<p>Rule of \veeE</p> <p>g p \vee q : h p : i r : j q : k r r g,h-i,j-k \veeE</p>	<p>Rule of \simI</p> <p>j p : k # \simp j-k \simI</p>	<p>Rule of \perpI</p> <p>j \simp : k p : # j,k #I</p>
<p>Rule of \simE</p> <p>j $\sim\sim$p : p j \simE</p>	<p>Rule of \rightarrowI</p> <p>j p : k q p $>$ q j-k $>$I</p>	<p>Rule of \rightarrowE</p> <p>j p $>$ q : k p : q j,k $>$E</p>
<p>Rule of \leftrightarrowI</p> <p>h p : i q : j q : k p p \leftrightarrow q h-i,j-k \leftrightarrowI</p>	<p>Rule of \leftrightarrowE</p> <p>j p \leftrightarrow q : k p : q j,k \leftrightarrowE</p>	<p>Rule of EFQ (Under SI/TI)</p> <p>j # : p j EFQ</p>

<p>Rule of $\forall I$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">j</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">t</td> <td style="padding-left: 20px;">Flag</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; text-align: center;">:</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">k</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">φt</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">m</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">$(\forall v)\varphi v$</td> <td style="padding-left: 20px;">j-k AI</td> </tr> </table> <p>where t does not occur in $(\forall v)\varphi v$ or any line available to line m.</p>	j	t	Flag		:		k	φt		m	$(\forall v)\varphi v$	j-k AI	<p>Rule of $\forall E$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">j</td> <td style="padding-left: 5px;">$(\forall v)\varphi v$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="text-align: center;">:</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">k</td> <td style="padding-left: 5px;">φt</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">j AE</p>	j	$(\forall v)\varphi v$:	k	φt	<p>Rule of $\exists I$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">j</td> <td style="padding-left: 5px;">φt</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="text-align: center;">:</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">k</td> <td style="padding-left: 5px;">$(\exists v)\varphi v$</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">j EI</p>	j	φt		:	k	$(\exists v)\varphi v$
j	t	Flag																								
	:																									
k	φt																									
m	$(\forall v)\varphi v$	j-k AI																								
j	$(\forall v)\varphi v$																									
	:																									
k	φt																									
j	φt																									
	:																									
k	$(\exists v)\varphi v$																									
<p>Rule of $\exists E$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">j</td> <td style="padding-left: 5px;">$(\exists v)\varphi v$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="text-align: center;">:</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">k</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">φt</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="border-right: 1px solid black; text-align: center;">:</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">l</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">ψ</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">m</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">ψ</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">j,k-l EE</p> <p>where t does not occur in ψ or any line available to line m.</p>	j	$(\exists v)\varphi v$:	k	φt		:	l	ψ	m	ψ	<p>Rule of $=I$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">j</td> <td style="padding-left: 5px;">$t=t$</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">=I</p>	j	$t=t$	<p>Rule of $=E$</p> <table style="border-collapse: collapse; margin-left: 20px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">j</td> <td style="padding-left: 5px;">$t_1=t_2$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="text-align: center;">:</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">k</td> <td style="padding-left: 5px;">φt_1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black;"></td> <td style="text-align: center;">:</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 5px;">m</td> <td style="padding-left: 5px;">φt_2</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">j,k =E</p>	j	$t_1=t_2$:	k	φt_1		:	m	φt_2
j	$(\exists v)\varphi v$																									
	:																									
k	φt																									
	:																									
l	ψ																									
m	ψ																									
j	$t=t$																									
j	$t_1=t_2$																									
	:																									
k	φt_1																									
	:																									
m	φt_2																									

