264 Formules valides, formules équivalentes

Les couples de formules suivants sont des exemples de formules équivalentes :

- ϕ et $\forall x \cdot \phi$ si x n'est pas libre dans ϕ ;
- ϕ et $\exists x \cdot \phi$ si x n'est pas libre dans ϕ ;
- $\forall x \cdot (\phi \wedge \psi)$ et $(\forall x \cdot \phi) \wedge (\forall x \cdot \psi)$
- $\exists x \cdot (\phi \vee \psi)$ et $(\exists x \cdot \phi) \vee (\exists x \cdot \psi)$
- $\exists x \cdot (\phi \rightarrow \psi)$ et $\exists x \cdot (\neg \phi \vee \psi)$
- $\exists x \cdot \phi$ et $\exists y \cdot \phi(y/x)$ si x est libre dans ϕ et y n'apparaît pas dans ϕ
- $\forall x \cdot \phi$ et $\forall y \cdot \phi(y/x)$ si x est libre dans ϕ et y n'apparaît pas dans ϕ

Si x n'est pas libre dans ψ, on obtient les équivalences suivantes :

- $\forall x \cdot (\phi \wedge \psi)$ et $(\forall x \cdot \phi) \wedge \psi$
- $\exists x \cdot (\phi \wedge \psi)$ et $(\exists x \cdot \phi) \wedge \psi$

265 Formules valides, formules équivalentes

Les équivalences suivantes nous permettent de faire passer en tête de formule tous les quantificateurs. Soit ϕ une formule, x une variable et ψ une formule dans laquelle x n'est pas libre :

- $\neg\forall x \cdot \phi$ et $\exists x \cdot \neg\phi$
- $\neg\exists x \cdot \phi$ et $\forall x \cdot \neg\phi$
- $(\forall x \cdot \phi) \vee \psi$ et $\forall x \cdot (\phi \vee \psi)$
- $(\exists x \cdot \phi) \wedge \psi$ et $\exists x \cdot (\phi \wedge \psi)$
- $(\psi \rightarrow \forall x \cdot \phi)$ et $\forall x \cdot (\psi \rightarrow \phi)$
- $(\psi \rightarrow \exists x \cdot \phi)$ et $\exists x \cdot (\psi \rightarrow \phi)$
- $(\forall x \cdot \phi) \rightarrow \psi$ et $\exists x \cdot (\phi \rightarrow \psi)$
- $(\exists x \cdot \phi) \rightarrow \psi$ et $\forall x \cdot (\phi \rightarrow \psi)$

Notons également que les formules suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \cdot \forall y \cdot \phi$ et $\forall y \cdot \forall x \cdot \phi$
- $\exists x \cdot \exists y \cdot \phi$ et $\exists y \cdot \exists x \cdot \phi$