Université de la Réunion
Faculté des Sciences et Technologies L3 informatique

Logique : calcul des prédicats du premier ordre

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants, vérifier si la formule A est conséquence logique de la conjonction des formules A_1 et A_2.
1) $A = \forall x\,(R(x) \Longrightarrow P(x))$; $A_1 = \forall x\,(P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$; $A_2 = \forall y\,(Q(y) \Longrightarrow R(y))$.
2) $A = \forall x\,(P(x) \Longrightarrow R(x))$; $A_1 = \forall x\,(P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$; $A_2 = \forall x\,(Q(x) \Longrightarrow R(x))$.

Exercice 2 Démontrer que les formules suivantes sont universellement valides ou contradictoires.
1) $\exists x\,\forall y\,\neg(P(x) \iff P(y)) \wedge \forall x\,P(x)$
2) $\exists y\,\exists z\,((P(x,x) \Longrightarrow P(z,y)) \wedge (\neg P(x,x) \vee P(y,z)))$
3) $\exists z\,(P(x,x) \vee P(x,y) \Longrightarrow P(x,z))$
4) $\forall x\,\forall y\,\exists z\,(P(x,y) \wedge (P(y,z) \Longrightarrow \neg P(z,z)))$

Exercice 3 Etablir la validité de la déduction $\Gamma \vdash B$ suivante où
$\Gamma = \{\forall x\,(S(x,x) \Longrightarrow U(x,x)),\ \neg(P(z,f(x)) \wedge U(z,f(x))),\ \forall y\,(Q(y,z) \wedge S(y,z))\}$ et
$B = \exists x\,\exists y\,(P(x,y) \Longrightarrow Q(x,y))$

Exercice 4 Etablir la validité de la déduction suivante.
Tout homme est un primate. Les dauphins ne sont pas des primates. Il y a des dauphins qui sont intelligents. Par conséquent, on peut ne pas être un homme et être intelligent.

Exercice 5 Etablir la validité de la déduction suivante.
Tous ceux qui pénétraient dans le bâtiment étaient fouillés sauf ceux accompagnés par des membres du personnel de l'entreprise. Certains étudiants de la Licence d'informatique pénétraient dans le bâtiment sans être accompagnés de personnes étrangères à la Licence d'informatique. Aucun des étudiants de la Licence d'informatique n'a été fouillé. Par conséquent, certains étudiants de la Licence d'informatique étaient membres du personnel de l'entreprise.

Exercice 6 Voici une démonstration informelle de l'existence d'une infinité de nombres premiers. Montrons que pour tout entier naturel n, il existe un entier p premier et strictement supérieur à n. Considérons $p = n! + 1$.
- Si p est premier, la propriété est vraie.
- Sinon, p admet un diviseur premier k.
- si $k > n$, la propriété est vraie.
- sinon, $k \leq n$, donc $n!$ est un multiple de k et p vaut 1 modulo k, contradiction (avec k diviseur de p).

1) Instancier la démonstration ci-dessus pour $0 \leq n \leq 4$.
2) En s'inspirant de cette démonstration, déterminer un modèle (quasi trivial ...) de l'ensemble des formules :
$F_1 = \forall n\,\mathrm{Inferieur}(n, f(n))$; $F_2 = \forall n\,\neg\mathrm{Inferieur}(n,n)$; $F_3 = \forall n\,\forall p\,\neg(\mathrm{Inferieur}(n,p) \wedge \mathrm{Inferieur}(p,n))$; $F_4 = \forall n\,\forall p\,(\mathrm{Divise}(n, f(p)) \Longrightarrow \mathrm{Inferieur}(p,n))$; $F_5 = \forall n\,(\mathrm{Premier}(n) \veebar \exists p\,(\mathrm{Divise}(p,n) \wedge \mathrm{Inferieur}(p,n) \wedge \mathrm{Premier}(p)))$.
3) Montrer (par exemple en utilisant SPASS ou OTTER), que la conjonction F_1, F_2, F_3, F_4 et F_5 entraîne :
$F_6 = \forall n\,\exists p\,(\mathrm{Inferieur}(n,p) \wedge \mathrm{InferieurOuEgal}(p, f(n)) \wedge \mathrm{Premier}(p))$.
4) Détailler comment conclure, à partir des réponses aux questions (1) et (2), à l'existence d'un intervalle fini de recherche où l'existence d'un entier premier strictement supérieur à n est garanti.

Exercice 7 Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble $\mathrm{Var}(A)$ des variables de A, l'ensemble $\mathrm{Varliees}(A)$ de ses variables liées et l'ensemble $\mathrm{Varlibres}(A)$ de ses variables libres.
1) $A = P(f(x,y)) \vee \forall z\,Q(a,z)$
2) $A = \forall x\,P(x,y,z) \vee \forall z\,(Q(z) \Longrightarrow R(z))$
3) $A = \forall x\,\exists y\,(P(x,y) \Longrightarrow \forall z\,Q(x,y,z))$

Exercice 8 Soit le langage $L = \{a\} \cup \{f/2\} \cup \{P/2, Q/1\}$, les termes t_i et les formules A_j suivants :
$t_1 = f(x, y)$, $t_2 = f(a, y)$, $t_3 = a$, $t_4 = f(x, f(x, x))$
$A_1 = P(x, y) \Longrightarrow \forall y\, Q(y)$, $A_2 = \forall y\, P(y, a) \Longrightarrow \exists y\, P(x, y)$
$A_3 = \forall x\, \exists z\, P(x, z) \wedge \exists x\, \forall y\, P(x, y)$, $A_4 = \exists x\, P(x, y) \wedge P(y, x)$.
Déterminer si t_i est substituable à x et calculer $(x|t_i)\, A_j$ pour tous i et j entre 1 et 4.

Exercice 9 Soit le langage $L_1 = \{zero\} \cup \{Succ/1, Plus/2\} \cup \emptyset$. On considère l'interprétation I de base $D = \mathbb{N}$ et telle que $zero_I = 0$, $Succ_I(x) = x + 1$ et $Plus_I(x, y) = x + y$. Soit v une valuation telle que $v(X) = 0$. Calculer $v_I(Plus(Succ(zero), X))$.

Exercice 10 On ajoute au langage L_1 de l'exercice précédent le symbole de prédicat $Imp/1$ et on étend I par $Imp_I(x) = V$ ssi x est impair. Déterminer la valeur de vérité de
1) $Imp(zero) \wedge Imp(Succ(zero))$ 2) $\exists x\, Imp(x)$

Exercice 11 Traduire les assertions suivantes par des formules du calcul des prédicats du premier ordre, en utilisant les prédicats unaires $F(x)$, $M(x)$ et $L(x)$ pour "le compte UNIX de x est fermé", "x est une machine de la salle SUN" et "x est étudiant de la Licence Informatique", respectivement, et le prédicat binaire $S(x, y)$ pour "x se sert de y".
Pour toute machine de la salle SUN, il y a quelqu'un qui s'en sert. Seuls les étudiants de Licence Informatique se servent des machines de la salle SUN. Ne se voient leur compte UNIX fermé que des étudiants de Licence Informatique. Les étudiants de Licence Informatique dont le compte UNIX est fermé ne se servent pas des machines de la salle SUN. Il y a des étudiants de Licence Informatique dont le compte UNIX n'est pas fermé.

Exercice 12 Dans le langage $\mathcal{L} = \{=, \neq\}$ on considère les formules :

$$\varphi \,:\, x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x$$

$$\chi \,:\, x = y \vee x = z \vee x = t \vee y = z \vee y = t \vee z = t$$

$$\psi \,:\, \forall t\, (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x \wedge (t = x \vee t = y \vee t = z))$$

Déterminer en justifiant, pour chacune de ces formules, si elle est *satisfaisable* (i.e. s'il existe une valuation pour laquelle elle est vraie) ou *valide* (i.e. si elle est vrai pour toute valuation) dans les cinq interprétations données par les bases suivantes, les prédicats $=$ et $\neq$ ayant l'interprétation standard :
$D_1 = \{0\}$; $D_2 = \{0, 1\}$; $D_3 = \{0, 1, 2\}$; $D_4 = \{0, 1, 2, 3\}$; $D_5 = \mathbb{N}$.

Exercice 13 On considère les formules atomiques suivantes :

$A(x)$: tous les angles intérieurs de x sont égaux	$E(x)$: x est un triangle équilatéral
$H(x)$: tous les côtés de x sont égaux	$P(x)$: x a un angle intérieur de plus de 180°
$Q(x)$: x est un quadrilatère	$R(x)$: x est un rectangle
$S(x)$: x est un carré	$T(x)$: x est un triangle

En considérant une interprétation de base l'ensemble de tous les polygones à trois ou quatre côtés, transcrire chacune des formules suivantes en une phrase en français et déterminer si la formule est vraie ou fausse dans cette interprétation.

a) $\forall x\, (Q(x) \veebar T(x))$	b) $\forall x\, (A(x) \Longrightarrow E(x))$
c) $\exists x\, (T(x) \wedge P(x))$	d) $\exists x\, (Q(x) \wedge \neg R(x))$
e) $\forall x\, ((A(x) \wedge T(x)) \iff E(x))$	f) $\forall x\, (H(x) \Longrightarrow E(x))$
g) $\forall x\, (T(x) \Longrightarrow \neg P(x))$	h) $\forall x\, (A(x) \Longrightarrow (E(x) \veebar R(x)))$
i) $\forall x\, (S(x) \iff (A(x) \wedge H(x)))$	j) $\forall x\, (T(x) \Longrightarrow (A(x) \iff H(x)))$

Exercice 14 Supposons que $P(x, y)$ soit une formule atomique du calcul des prédicats du premier ordre et condérons une interprétation I de base constituée uniquement des entiers naturels $2, 3, 5$. Alors dans cette interprétation et relativement à une valuation assignant la valeur 2 à x, la formule $\exists y\, P(x, y)$ s'exprime par $P_I(2, 2) \vee P_I(2, 3) \vee P_I(2, 5)$. Dans l'interprétation I la formule $\exists x\, \forall y\, P(x, y)$ s'exprime par $(P_I(2, 2) \wedge P_I(2, 3) \wedge P_I(2, 5)) \vee (P_I(3, 2) \wedge P_I(3, 3) \wedge P_I(3, 5)) \vee (P_I(5, 2) \wedge P_I(5, 3) \wedge P_I(5, 5))$.
Utiliser des conjonctions et/ou disjonctions pour exprimer les formules suivantes.
a) $\exists x\, P(x, y)$ (Interprétation I et valuation v telle que $v(y) = 5$)
b) $\forall x\, P(x, y)$ (Interprétation I et valuation v telle que $v(y) = 3$)

e) $\forall x\,\forall y\,P(x,y)$ (Interprétation I)
f) $\forall x\,\exists y\,P(x,y)$ (Interprétation I)

Exercice 15 Ecrire la négation de chacune des assertions suivantes en une phrase en français.
a) Tout étudiant de licence informatique prépare l'unité d'enseignement "Logique et Prolog" ou l'unité d'enseignement "Langages formels et Compilation".
b) Au moins un étudiant de licence informatique prépare l'unité d'enseignement Systèmes.
c) Un étudiant du master d'informatique du Professeur Lenhart a lu tous les travaux de ce dernier sur les structures de données.

Exercice 16 Dans le langage $L = \{P/2, = /2\}$, on considère les formules suivantes :

$$A_1 = \forall x\,\exists y\,P(x,y)$$

$$A_2 = \forall x\,\forall y\,(\exists z\,(P(x,z) \wedge P(z,y)) \Longrightarrow P(x,y))$$

$$A_3 = \forall x\,\forall y\,(P(x,y) \wedge P(y,x) \iff =(y,x))$$

$$A_4 = \forall x\,\forall y\,\exists z\,(\neg P(z,x) \vee \neg P(z,y) \vee =(x,y))$$

Déterminer la validité de ces formules dans les interprétations I suivantes :

- $D_1 = \mathbb{N}$ et $P_I(x,y) = V$ ssi $x \leq y$; le prédicat $=$ a l'interprétation standard.
- $D_2 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $P_I(x,y) = V$ ssi $x \neq y$ et x divise y ; le prédicat $=$ a l'interprétation standard.

Exercice 17 Soit $A_1 = \forall x\,(R(x) \Longrightarrow P(x) \vee Q(x))$, $A_2 = R(a) \wedge R(b)$ et $A_3 = P(a)$. Montrer que $A_1, A_2 \not\models A_3$.

Exercice 18 Soit $\Gamma = \{A_1, A_2, A_3\}$ l'ensemble de formules bien formées suivantes :
$A_1 = \forall x\,\forall y\,\forall z\,((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Longrightarrow P(x,z))$
$A_2 = \forall x\,(P(a,x) \wedge P(x,b))$
$A_3 = \forall x\,P(x,f(x))$
1) Proposer un modèle I pour Γ, i.e., un domaine D, deux éléments a_I et b_I de D, une application $f_I : D \Longrightarrow D$ et une application $P_I : D \times D \Longrightarrow \{V, F\}$, tel que $\models_I A_1$, $\models_I A_2$ et $\models_I A_3$.
2) Montrer que $A_1, A_2, A_3 \models \exists x\,P(x,a)$.

Exercice 19 Soit $\Gamma = \{A_1, A_2, A_3\}$ l'ensemble des formules suivantes :
$A_1 = \forall x\,\forall y\,\forall z\,((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z))$
$A_2 = \forall x\,(P(a,x) \vee P(x,b))$
$A_3 = \forall x\,P(x,f(x))$
1) Proposer un modèle I pour Γ.
2) Montrer que $A_1, A_2, A_3 \not\models \exists x\,P(x,a)$.

Exercice 20 Soit $\Gamma = \{A_1, A_2, A_3\}$ l'ensemble des formules suivantes :
$A_1 = \forall x\,\forall y\,\forall z\,((\neg P(x,y,z) \wedge \neg P(y,z,x)) \Longrightarrow P(z,x,y))$
$A_2 = \forall x\,(P(x,a,b) \vee E(x,a,b))$
$A_3 = \forall x\,P(f(x),x,a)$
1) Proposer un modèle I pour Γ. On expliquera de manière claire et concise comment le modèle proposé satisfait chacune des formules A_1, A_2 et A_3.
2) Montrer que $A_1, A_2, A_3 \not\models \exists x\,\exists y\,P(b,x,y)$.

Exercice 21 Soit l'ensemble $\Gamma = \{\forall x\,\neg P(x,x)\,;\,\forall x\,\forall y\,\forall z\,((P(x,y) \wedge P(y,z)) \Rightarrow P(x,z))\,;\,\forall x\,\exists y\,P(x,y)\}$.
1) Proposer un modèle pour Γ.
2) Montrer qu'aucun modèle de Γ ne peut avoir un domaine fini.

Exercice 22 Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, soit A_n la formule du calcul des prédicats du premier ordre définie par :

1) Proposer un modèle pour A_3, où

$$A_3 = \forall y\left(\left((x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3)\right) \wedge \left((y = x_1) \vee (y = x_2) \vee (y = x_3)\right)\right)$$

2) Montrer que quel que soit l'entier naturel $n \geq 2$, A_n ne peut admettre de modèle de domaine infini.
3) Pour $n \geq 2$, les domaines des modèles de A_n ont-ils nécessairement tous le même nombre d'éléments ? Justifier la réponse.

Exercice 23 1° Proposer un modèle pour l'ensemble de formules

$$\Gamma = \{P(a), \forall x(P(x) \Longrightarrow Q(s(x))), \forall x(Q(x) \Longrightarrow P(s(x)))\}.$$

2° Montrer que le modèle proposé à la question précédente satisfait la formule $P(s(s(s(s(a)))))$.
3° Montrer que $\Gamma \not\models \forall x P(x)$.

Exercice 24 Soit n un entier naturel non nul fixé.
1° Donner un ensemble Γ de formules du calcul des prédicats du permier ordre n'utilisant aucune constante, aucun symbole fonctionnel et le seul symbole de prédicat $=$, dont tout modèle dans lequel $=$ est interprété comme l'égalité ait une base ayant exactement n éléments. Justifier.
2° Proposer un modèle pour l'ensemble Γ de la question précédente. Justifier.

Exercice 25 1° Donner un ensemble Γ de formules du calcul des prédicats du permier ordre dont tout modèle ait une base infinie. Justifier.
2° Proposer un modèle pour l'ensemble Γ de la question précédente. Justifier.

Exercice 26 1) Mettre sous forme prénexe les formules suivantes :

$$A = \forall x\, \exists y\, \forall z\, (P(x, y, z) \Longrightarrow \forall y\, \exists z\, Q(y, z))$$

$$B = \forall x\, (\exists z\, (P(z, x) \Longrightarrow \exists y\, P(y, x) \wedge \neg(\exists t\, (P(t, x) \wedge P(t, z)))))$$

$$C = \forall x\, \forall y\, (<(x, y) \Longrightarrow \neg <(y, x)) \vee \exists z\, \forall x\, (<(x, y) \Longrightarrow \forall x\ <(z, x))$$

$$D = \forall y\, \exists x\, P(x, y) \iff \forall z\, \forall x\, P(z, x)$$

2) Mettre les formules de la question précédente sous forme de Skolem.
3) Mettre les formules de la question précédente sous forme clausale.

Exercice 27 Après avoir transformé le problème sous bonne forme, utiliser le théorème de Herbrand pour savoir si la formule A est conséquence des formules A_1 et A_2.

1. $A = \forall x\, (R(x) \Longrightarrow P(x))$
   $A_1 = \forall x\, (P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$
   $A_2 = \forall y\, (Q(y) \Longrightarrow R(y))$

2. $A = \forall x\, (P(x) \Longrightarrow R(x))$
   $A_1 = \forall x\, (P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$
   $A_2 = \forall x\, (Q(x) \Longrightarrow R(x))$

Exercice 28 1) Appliquer la méthode des arbres sémantiques pour savoir si la formule A est conséquence des formules A_1 et A_2.
$A = \forall x\, (R(x) \Longrightarrow P(x))$
$A_1 = \forall x\, (P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$
$A_2 = \forall y\, (Q(y) \Longrightarrow R(y))$
2) Reprendre l'exercice précédent en appliquant la méthode des arbres sémantiques.

Exercice 29 Montrer que $A = P(x, f(x))$ et $B = P(f(y), y)$ ne sont pas unifiables.

Exercice 30 Peut-on unifier les deux formules atomiques suivantes ?

Exercice 31 1) Donner, s'il en existe, un plus grand unificateur σ_j de A_j et B_j.
i) $A_1 = P(x, a)$ et $B_1 = P(x, a)$;
ii) $A_2 = P(h(u, f(v)), u, h(x, f(a)))$ et $B_2 = P(w, f(h(b, a)), w)$;
iii) $A_3 = P(x, f(x, h(k(x, y)), y), z, f(h(x), y, z), k(a, b), x)$
et $B_3 = P(h(k(f(u, h(v), u), h(u))), u, f(h(u), v, w), v, k(b, a), h(w))$.
2) Les clauses C_1 et C_2 ci-dessous constituent-elles une paire résoluble ? Justifier.
$C_1 = \neg P(u, u) \vee P(f(u), h(u))$; $C_2 = \neg P(v, v) \vee P(h(v), f(v))$.

Exercice 32 Soient les formules atomiques

$$\begin{cases} At_1 = P(b, x_1, x_1) \\ At'_1 = P(x'_1, x'_1, b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} At_2 = P(f(b, x_1, x_1), x_2, x_2) \\ At'_2 = P(x'_2, x'_2, f(x'_1, x'_1, b)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} At_3 = P(f(f(b, x_1, x_1), x_2, x_2), x_3, x_3) \\ At'_3 = P(x'_3, x'_3, f(x'_2, x'_2, f(x'_1, x'_1, b))) \end{cases}$$

$\ldots$

Calculer l'unifié de At_i et At'_i, c'est-à-dire la formule, que l'on notera F_i, obtenue après unification des atomes At_i et At'_i, pour i allant de 1 à 5.