Université de la Réunion
Faculté des Sciences et Technologies L3 informatique

Logique : calcul propositionnel

Exercice 1 Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes du calcul propositionnel.
1) $B \Longrightarrow ((B \Longrightarrow C) \Longrightarrow C)$
2) $\neg B \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$
3) $\neg\neg B \Longrightarrow B$
4) $B \Longrightarrow \neg\neg B$
5) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (\neg\neg A \Longrightarrow \neg\neg B)$
6) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (\neg B \Longrightarrow \neg A)$
7) $B \Longrightarrow (\neg C \Longrightarrow \neg(B \Longrightarrow C))$
8) $(\neg A \Longrightarrow A) \Longrightarrow A$
9) $(B \Longrightarrow A) \Longrightarrow ((\neg B \Longrightarrow A) \Longrightarrow A)$

Exercice 2 Démontrer que la formule suivante est universellement valide ou contradictoire :

$$A = (p \Longrightarrow q) \wedge (\neg p \Longrightarrow (q \vee r)) \wedge (\neg r \Longrightarrow \neg q) \wedge ((q \wedge r) \Longrightarrow \neg p) \wedge (r \Longrightarrow p).$$

Exercice 3 Etablir la validité de chacun des raisonnements suivants ou donner un contre-exemple montrant son invalidité.

(a) Si Rachelle gagne la confiance de ses partenaires et travaille dur, alors elle aura une promotion. Si elle a une promotion, alors elle achetera un nouvelle voiture. Elle n'a pas acheté une nouvelle voiture. Par conséquent, ou bien Rachelle n'a pas gagné la confiance de ses partenaires, ou bien elle n'a pas travaillé dur.

(b) Si Dominique va au champ de courses, alors Hélène piquera une crise de folie. Si Ralph participe au championat de rodéo, alors Cynthia piquera une crise de folie. Si Hélène ou Cynthia pique une crise de folie, alors Véronica (leur mandataire) sera avertie. Véronica n'a eu de nouvelle d'aucune de ces deux clientes. Par conséquent, Dominique n'est pas allé au champ de courses et Ralph n'a pas participé au championat de rodéo.

(c) Si Norma doit aller à sa réunion du mardi matin, alors elle devra se lever tôt ce matin là. Si elle va au concert de rock le lundi soir, alors elle rentrera après 23h. Si Norma rentre chez elle après 23h et se lève tôt le lendemain matin, alors elle ira au travail après moins de sept heures de sommeil. Malheureusement, Norma ne peut pas aller travailler après moins de sept heures de sommeil. Par conséquent, ou bien Norma n'ira pas au concert de rock, ou bien elle ratera sa réunion du mardi matin.

Exercice 4 Etablir la validité du raisonnement suivant.
Quelque chose existe. Si quelque chose existe, soit quelque chose a toujours existé, soit ce qui existe maintenant est survenu de nulle part. Si quelque chose existe, soit elle existe de part la nécessité de sa propre nature, soit elle existe de part la volonté d'autre chose. Si quelque chose existe de part la nécessité de sa propre nature, alors quelque chose a toujours existé. Si quelque chose existe de part la volonté d'autre chose, alors il est faux d'affirmer que ce qui existe maintenant est survenu de nulle part. Par conséquent, quelque chose a toujours existé.

Exercice 5 Etablir la validité du raisonnement suivant.
Si Jacques n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit c'est que Pierre est meurtrier ou Jacques est menteur. Si Pierre n'est pas meurtrier, alors Jacques n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit et le crime a eu lieu après minuit. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Pierre est meurtrier ou Jacques n'est pas menteur. Donc Pierre est meurtrier.

Exercice 6 Soient les propositions atomiques p, q, r et s suivantes :
p : Je finis d'écrire mon programme avant le déjeuner ; q : je jouerai au tennis cet après-midi ; r : Il fait beau temps ; s : Le taux d'humidité est faible. Ecrire ce qui suit sous forme symbolique.
(a) Finir d'écrire mon programme avant le déjeuner est nécessaire pour que j'aille jouer au tennis cet après-midi.

Exercice 7 Après avoir préparé un gâteau pour ses deux neveux et deux nièces qui lui ont rendu visite, Tante Marie laisse le gâteau refroidir sur sa table de cuisine puis s'en va faire une course. A son retour, elle s'aperçoit que le quart du gâteau a été mangé. Puisque personne d'autre que les quatre visiteurs n'était à la maison ce jour-là, Tante Marie demande à chaque neveu et nièce qui a mangé le quart du gâteau. Les quatre "suspects" disent ceci :

> Charles : Kelly a mangé le quart du gâteau.
>
> Sharon : Je n'ai pas mangé le quart du gâteau.
>
> Kelly : John a mangé le quart du gâteau.
>
> John : Kelly a menti lorsqu'elle a dit que j'ai mangé le quart du gâteau.

Si seul un des quatre visiteurs est coupable et les visiteurs innocents disent vrai, qui des quatre a effectivement mangé le quart du gâteau ?

Exercice 8 Donner la table de vérité de la formule
$\varphi = (\neg X \vee Y) \vee (Z \Longrightarrow (X \iff Y))$.

Exercice 9 Caractériser les notions de tautologie, contradiction, formule réfutable, formule conséquence sémantique d'une autre formule, formule satisfaisable, à partir de la *colonne principale* (dernière colonne) d'une table de vérité.

Exercice 10 Soit p, q et r des propositions atomiques. Trouver une forme de la contraposée de $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$ avec
(a) une seule occurrence du connecteur $\Longrightarrow$;
(b) aucune occurrence du connecteur $\Longrightarrow$.

Exercice 11 Soit le connecteur "Nor" ou "Non ... ou ..." désigné par $\downarrow$ et défini par

$$(p \downarrow q) \equiv \neg(p \vee q).$$

Ecrire les formules suivantes en utilisant uniquement ce connecteur.
(a) $\neg P$; (b) $p \vee q$; (c) $p \wedge q$; (d) $p \Longrightarrow q$; (e) $p \iff q$.

Exercice 12 En vue d'exprimer $\vee$, $\wedge$ et $\iff$ en fonction de $\neg$ et $\Longrightarrow$, compléter les équivalences suivantes :
$A \vee B \equiv$
$A \wedge B \equiv$
$A \iff B \equiv$

Exercice 13 Montrer, à l'aide de tables de vérité ou de transformations de formules que
1) $\models (A \iff \neg\neg A)$
2) $\models (\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B))$
3) $\models ((A \Longrightarrow B) \iff (\neg A \vee B))$
4) $\models (((A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow C)) \Longrightarrow (A \Longrightarrow C))$

Exercice 14 Déterminer toutes les valeurs de vérité, s'il y en a, des atomes p, q, r, s, t, qui rendent vraie chacune des formules suivantes.
(a) $((p \wedge q) \wedge r) \Longrightarrow (s \vee t)$
(b) $(p \wedge (q \wedge r)) \Longrightarrow (s \veebar t)$, où $\veebar$ est la disjonction exclusive, i.e $s \veebar t$ est vrai ssi s est vrai ou t est vrai mais pas les deux à la fois.

Exercice 15 (a) Si l'atome q a pour valeur de vérité V, déterminer toutes les assignations de valeurs de vérité aux atomes p, r et s pour lesquelles la valeur de vérité de la proposition

$$(q \Longrightarrow ((\neg p \vee r) \wedge \neg s)) \wedge (\neg s \Longrightarrow (\neg r \wedge q))$$

Exercice 16 Exprimer en bon français la réciproque R, l'inverse I, la contraposée C et la négation N de l'assertion A suivante :
A : "*Si Sandra finit de préparer son prochain cours, elle ira faire ses courses à moins qu'il pleuve.*"

Exercice 17 Pour chacune des phrases suivantes, remplir les points de suspension avec l'une des expressions *la réciproque*, *l'inverse* ou *la contraposée*, de sorte que la proposition résultante soit vraie.
1° La réciproque de l'inverse de $p \Longrightarrow q$ est ... de $p \Longrightarrow q$.
2° La réciproque de l'inverse de $p \Longrightarrow q$ est ... de $q \Longrightarrow p$.
3° L'inverse de la réciproque de $p \Longrightarrow q$ est ... de $p \Longrightarrow q$.
4° L'inverse de la réciproque de $p \Longrightarrow q$ est ... de $q \Longrightarrow p$.
5° La réciproque de la contraposée de $p \Longrightarrow q$ est ... de $p \Longrightarrow q$.
6° La réciproque de la contraposée de $p \Longrightarrow q$ est ... de $q \Longrightarrow p$.
7° L'inverse de la contraposée de $p \Longrightarrow q$ est ... de $p \Longrightarrow q$.

Exercice 18 Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse, p, q et r étant des propositions atomiques arbitraires.
(a)Une manière équivalente d'exprimer la réciproque de "p est suffisant pour q" est "p est nécessaire pour q".
(b) Une manière équivalente d'exprimer l'inverse de "p est nécessaire pour q" est "$\neg p$ est suffisant pour $\neg q$".
(c) Une manière équivalente d'exprimer la contraposée de "p est nécessaire pour q" est "$\neg q$ est suffisant pour $\neg p$".
(d) Une manière équivalente d'exprimer la réciproque de $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)$ est $(\neg q \vee r) \Longrightarrow p$.

Exercice 19 1) Expliquer pourquoi la table de vérité d'une formule du calcul propositionnel permet de décider si cette formule est un théorème ou non.
2) Démontrer que la formule suivante est un théorème du calcul propositionnel.

$$(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow ((C \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B))$$

Exercice 20 On considère deux formules A et B composées chacunes des n variables propositionnelles $a_{j1}, \ldots, a_{jn}$, $n \geq 1$. En examinant les différentes valeurs de vérité de ces deux formules à l'aide d'une même table de vérité on s'aperçoit que la colonne de A comporte la valeur F (Faux) en exactement k positions, $0 \leq k \leq 2^n$, et que celle de B comporte la valeur V (Vrai) en exactement l positions, celles-ci étant différentes des k positions où la colonne de A comporte la valeur F, $0 \leq l \leq 2^n$. Justifier la réponse à chacune des questions suivantes.
1) Si A est contradictoire, que peut-on dire de la validité de B ?
2) Si A est une tautologie, que peut-on dire de la validité de B ?
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur k et l pour que les formules A et B soient sémantiquement équivalentes.
4) La condition de la question précédente est-elle nécessaire pour que A soit conséquence sémantique de B ? Est-elle nécessaire pour que B soit conséquence sémantique de A ?

Exercice 21 On considère le système formel S obtenu en ajoutant le schéma d'axiome SA' suivant au sfcp :

$$SA' \quad : \quad (B \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)) \Longrightarrow A.$$

1) Une formule quelconque de la forme SA' est-elle une tautologie ?
2) Caractériser $\mathbb{T}_S$.
3) Le sf S est-il décidable, correct, complet ?

Exercice 22 On considère le système formel S obtenu en remplaçant dans le sfcp les trois schémas d'axiome par l'unique schéma d'axiome SA suivant :

$$SA \; : \; (A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow A)$$

1) Tous les théorèmes de S sont-ils des tautologies ?
2) Montrer que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_S \quad = \quad & \{(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow A) : A, B \in \mathbb{F}\} \\ & \cup \{(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B) : A, B \in \mathbb{F}\} \end{aligned}$$

3) Toutes les tautologies de $\mathbb{F}$ sont-elles des théorèmes de S ?

Exercice 23 On considère le système formel S obtenu en ajoutant le schéma d'axiome SA suivant au système formel du calcul des propositions :

$$SA \quad : \quad ((B \Longrightarrow C) \Longrightarrow ((A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow C))) \Longrightarrow C$$

1) Une formule quelconque de la forme SA est-elle une tautologie ?
2) Quel est l'ensemble $\mathbb{T}_S$ des théorèmes de S ?
3) Le système formel S est-il décidable ?

Exercice 24 On considère le système formel S obtenu à partir de celui du calcul des propositions en substituant le schéma d'axiome SA suivant aux trois schémas d'axiome de ce dernier :

$$SA \quad : \quad (A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A)$$

1) Les théorèmes de S sont-ils tous des tautologies ? Justifier la réponse.
2) Montrer que l'ensemble $\mathbb{T}_S$ des théorèmes de S est égal à l'ensemble

$$T = \{(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (B \Longrightarrow A) \,:\, A, B \in \mathbb{F}\}$$

où $\mathbb{F}$ désigne l'ensemble des formules bien formées du calcul propositionnel.
3) Le système formel S est-il décidable ? Est-il correct ? Est-il complet ? Justifier la réponse à chacune de ces questions.

Exercice 25 On considère le système formel S obtenu à partir de celui du calcul des propositions en substituant le schéma d'axiome SA suivant aux trois schémas d'axiome de ce dernier :

$$SA \quad : \quad (A \Longrightarrow B) \Longrightarrow (A \Longrightarrow B)$$

1) Les théorèmes de S sont-ils tous des tautologies ? Justifier la réponse.
2) Caractériser l'ensemble $\mathbb{T}_S$ des théorèmes de S. Justifier la caractérisation.
3) Le système formel S est-il décidable ? Est-il correct ? Est-il complet ? Justifier la réponse à chacune de ces questions.
4) Que devient $\mathbb{T}_S$ si on augmente l'ensemble $\mathbb{A}_S$ des axiomes de S d'un élément quelconque de $\mathbb{T}_S \setminus \mathbb{A}_S$ (ensemble des théorèmes qui ne sont pas des axiomes) ?

Exercice 26 On considère le système formel S obtenu en ajoutant le schéma d'axiome SA' suivant au système formel du calcul des propositions :

$$SA' \quad : \quad ((B \Longrightarrow (A \Longrightarrow C)) \Longrightarrow ((B \Longrightarrow A) \Longrightarrow (B \Longrightarrow C))) \Longrightarrow A.$$

1° Une formule quelconque de la forme SA' est-elle une tautologie ? On justifiera la réponse.
2° Caractériser $\mathbb{T}_S$ et justifier la caractérisation.
3° Le système formel S est-il décidable, correct, complet ? On justifiera chaque réponse.

Exercice 27 On considère le système formel S obtenu à partir de celui du calcul des propositions en ajoutant le schéma d'axiome SA' suivant (l'alphabet, les formules bien formées et les règles de déduction restent inchangés) :

$$\mathrm{SA}' \quad : \quad A \Longrightarrow ((B \Longrightarrow A) \Longrightarrow ((\neg B \Longrightarrow A) \Longrightarrow A)),$$

A, B étant des formules bien formées quelconques.
1° Une formule quelconque de la forme SA' est-elle une tautologie ? Justifier.
2° Quels sont les théorèmes de S. Justifier.
3° Le système formel S est-il décidable, correct, complet ? Justifier chaque réponse.

Exercice 28 1) En utilisant la méthode de résolution, démontrer que la formule suivante est universellement valide ou contradictoire :

$$A = (a \Longrightarrow b) \wedge (\neg a \Longrightarrow (b \vee c)) \wedge (\neg c \Longrightarrow \neg b) \wedge ((b \wedge c) \Longrightarrow \neg a) \wedge (c \Longrightarrow a).$$

2) Démontrer la déduction suivante dans le sfcp :