Université de la Réunion
Faculté des Sciences et Technologies L3 informatique

Logique : systèmes formels

Exercice 1 Soit le système formel S_1 défini par :
$\Sigma_{S_1} = \{1, +, =\}$,
$\mathbb{F}_{S_1} = \{1^n + 1^m = 1^p \quad | \quad n, m, p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ où $1^k = \underbrace{1 \cdots 1}_{k \text{ fois}}$,
$\mathbb{A}_{S_1} = \{1 + 1 = 11\}$,
$\Omega_{S_1} = \{r_1, r_2\}$ où :

$$1^n + 1^m = 1^p \underset{r_1}{\vdash} 1^{n+1} + 1^m = 1^{p+1}$$

$$1^n + 1^m = 1^p \underset{r_2}{\vdash} 1^n + 1^{m+1} = 1^{p+1}.$$

1) Montrer que $1 + 11 = 11 \underset{S_1}{\vdash} 111 + 111 = 11111$.
2) Montrer que $111 + 111 = 111111$ est un théorème de S_1.
3) Montrer que $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 111111$ n'est pas un théorème de S_1.
4) Montrer que $\mathbb{T}_{S_1} = \{1^n + 1^m = 1^{n+m} | n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.
5) Montrer que S_1 est cohérent.
6) Les axiomes de S_1 sont-ils indépendants ?
7) S_1 est-il décidable ?

Exercice 2 Soit le système formel S défini par :
$\Sigma_S = \{a, b, c\}$
$\mathbb{F}_S = \{a^n b c^m | n, m \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{A}_S = \{a^{2k} b c^{2k} | k \in \mathbb{N}\}$
$\Omega_S = \{r\}$ où $a^n b c^m, a^{n'} b c^{m'} \underset{r}{\vdash} a^{n+n'} b c^m$.
1) Montrer que $a^6 b c^2 \in \mathbb{T}_S$ et $a^{10} b \in \mathbb{T}_S$
2) Identifier l'ensemble $\mathbb{T}_S$ et montrer que chaque théorème de S peut être dérivé en au plus 3 étapes.
3) Montrer que si on enlève un axiome de S, alors l'ensemble des théorèmes du système formel résultant n'est pas le même que celui de S.
4) Proposer un système formel S' tel que $\Sigma_{S'} = \Sigma_S$, $\mathbb{F}_{S'} = \mathbb{F}_S$, $\mathbb{A}_{S'}$ est réduit à un singleton et $\Omega_{S'}$ est une paire et tel que $\mathbb{T}_{S'} = \mathbb{T}_S$. On dira que S est *finiment* (ou *fini*) *axiomatisable*.

Exercice 3 Soit le système formel S défini par :
– l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$,
– les formules bien formées constituées de suites finies de lettres de Σ ne contenant qu'une seule fois la lettre b et une seule fois la lettre c (b devant se trouver avant c dans la suite, mais pas nécessairement immédiatement avant),
– l'unique axiome bc,
– les deux règles d'inférences r_1 et r_2 telles que, si $\xi = \alpha b \alpha' c \alpha''$ où $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont des suites finies (éventuellement vides) de symboles a, alors

$$r_1 \ : \ \xi \vdash a\xi a \qquad \text{et} \qquad r_2 \ : \ \xi \vdash \alpha b \alpha' a c \alpha'' a.$$

1) Quelle est l'incidence des règles d'inférence r_1 et r_2 sur la longueur (nombre de lettres) des formules de S ? Que peut-on en déduire sur la longueur de tout théorème de S ?
2) Donner quatre théorèmes de S.
3) Montrer que le théorème $abacaa$ admet deux démonstrations distinctes dans S.
4) Donner quatre formules bien formées de S qui ne sont pas des théorèmes ; S est-il cohérent ?
5) Démontrer que, pour tout théorème $\alpha b \alpha' c \alpha''$ de S où $\alpha, \alpha', \alpha''$ sont des suites finies (éventuellement vides) de symboles a, la longueur de α'' est la somme des longueurs de α et α'.
6) On modifie le système S en S' en lui ajoutant les règles r_3 et r_4 définies par

$$r_3 \ : \ \xi \vdash a\xi \qquad \text{et} \qquad r_4 \ : \ \xi \vdash \alpha b \alpha' a c \alpha''.$$

Donner quatre théorèmes de S' qui ne sont pas des théorèmes de S.

Exercice 4 Soit $L = \{a, b, c\}$. On cherche à définir le système formel décrivant l'ordre alphabétique sur les mots composés des lettres de L. Le système formel S est défini par :

- l'alphabet $\Sigma = L \cup \{<\}$;
- les formules bien formées de S sont les mots contenant une seule fois la lettre $<$;
- l'ensemble des axiomes est constitué des six axiomes suivants : $< x$ pour tout $x \in L$, $a < b$, $a < c$ et $b < c$;
- les règles de déduction sont définies pour toute formule bien formée $\alpha < \beta$ par :

  R_1 : $\alpha < \beta \vdash x\alpha < x\beta$ pour tout $x \in L$;

  R_2 : $\alpha < \beta \vdash \alpha < \beta x$ pour tout $x \in L$;

  R_3 : $\alpha < \beta \vdash \alpha x < \beta$ pour tout $x \in L$, si longueur(α) $\geq$ longueur(β).

1) Donner deux théorèmes de S qui ne sont pas des axiomes ; proposer une preuve pour chacun des deux théorèmes.

2) Donner deux formules bien formées de S qui n'en sont pas des théorèmes ; justifier pourquoi ce ne sont pas des théorèmes.

3) Donner une preuve pour chacun des deux théorèmes suivants : $baba < babac$; $bacba < bacc$. Ces preuves sont-elles uniques ?