

**Calculabilité et complexité – premier contrôle continu**  
**Durée : 90 minutes – sans document ni moyen de communication**

*Répondre dans les cadres prévus à cet effet.*

Nom :

Signature :

Prénom(s) :

**Exercice 1** (5 ●) On note  $N$  l'ensemble des entiers naturels.

**1.1** (1 ●) Rappelez la définition d'ensemble dénombrable.

**1.2** (2 ●) L'ensemble  $N \times N$  est-il dénombrable? Justifiez.

**1.3** (2 ●) L'ensemble  $A$  des applications de  $N$  dans  $N$  est-il dénombrable? Justifiez.

**Exercice 2** (5 ●) Soient  $L_1 \subseteq \Sigma^*$  un langage récursif et  $L_2 \subseteq \Sigma^*$  un langage récursivement énumérable non récursif.

**2.1** (2 ●) Discutez l'existence d'un algorithme qui liste tous les mots de  $L_2$ .

**2.2** (2 ●) Discutez l'existence d'un algorithme qui liste tous les mots de  $L_2$  dans l'ordre lexicographique.

**2.3** (1 ●) Discutez l'existence d'un algorithme qui liste tous les mots de  $L_1$  dans l'ordre lexicographique.

Nom :

Signature :

Prénom(s) :

**Exercice 3** (5 ●) Rappelez la preuve de l'indécidabilité du problème de l'arrêt comme présentée par Christopher Strachey dans *The Computer Journal* en 1965.

**Exercice 4 (5 ●)**

**4.1 (1 ●)** Rappelez la définition de langage récursif. Donnez un exemple simple. Justifiez.

**4.2 (1 ●)** Rappelez la définition de langage récursivement énumérable. Donnez un exemple de langage non récursif mais récursivement énumérable. Justifiez.

**4.3 (1 ●)** Donnez un exemple de langage non récursivement énumérable. Justifiez.

**4.4 (1 ●)** Montrez que le complément d'un langage récursif est récursif.

**4.5 (1 ●)** Montrez que si un langage et son complément sont récursivement énumérables alors ils sont récursifs.