Université de la Réunion Décembre 2013

Master d'informatique – M1
Second contrôle continu de l'U.E. calculabilité et complexité
Durée : 90 minutes – sans document ni moyen électronique

Répondre uniquement dans les cadres prévus à cet effet

Nom :	Signature :
Prénom(s) :	Date de naissance :

Exercice 1 (5 •) **1.1** On souhaite calculer le produit de deux entiers naturels m et n en se basant sur les égalités :

$$\begin{cases} m \times 0 = 0 \\ m \times 1 = m \\ m \times (n+1) = m \times n + m \end{cases}$$

Donnez le pseudo-code correspondant et déterminez la complexité en temps en fonction du nombre d'additions.

1.2 (5 •) On souhaite calculer le produit de deux entiers naturels m et n en se basant cette fois sur les égalités :

$$\begin{cases} m \times 0 = 0 \\ m \times 1 = m \\ m \times (2n+1) = p + p + m \text{ où } p = m \times n \\ m \times 2n = p + p \text{ où } p = m \times n \end{cases}$$

L'emploi de la variable locale p évite une double évaluation du produit $m \times n$. Soit $a(n)$ le nombre d'additions effectuées lors de l'exécution de cet algorithme lorsqu'il prend en entrée m et n.

Donnez une définition récurrente de la suite $a(n)$.

Encadrez a par deux suites croissantes α et β de la forme $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 0$, $\alpha(n) = \alpha(\lfloor n/2 \rfloor) + c_1$ quand $n > 1$ et $\beta(0) = 0$, $\beta(1) = 0$, $\beta(n) = \beta(\lfloor n/2 \rfloor) + c_2$ quand $n > 1$.

Déterminez une formule close pour $\alpha(2^k)$. Idem pour $\beta(2^k)$.

Donnez un encadrement de $a(n)$ où α et β n'interviennent plus.

Quelle est la complexité en temps dans le pire des cas de cet algorithme ? Comparez avec la question précédente.

Nom :	Signature :
Prénom(s) :	

Exercice 3 : (4 •) Pour chacune des classes de complexité ci-dessous, remplissez les parenthèses de l'expression $\Theta(\qquad)$ avec la fonction de n adéquate et décrivez succinctement (par son nom par exemple) un algorithme de complexité en temps correspondant (pire des cas, machine déterministe).

a) constante : $\Theta(\qquad)$

b) logarithmique : $\Theta(\qquad)$

c) linéaire : $\Theta(\qquad)$

d) quasi-linéaire : $\Theta(\qquad)$

e) quadratique : $\Theta(\qquad)$

f) cubique : $\Theta(\qquad)$

g) exponentielle : $\Theta(\qquad)$

Exercice 4 (6 •) Donnez ci-dessous les définitions *précises* de deux problèmes NP-complets, un en logique propositionnelle et l'autre en théorie des graphes. Pour chacun d'eux, donnez une instance positive et une instance négative avec une brève justification de la polarité de ces instances.

P1 :

P2 :