

# Exercices indécidabilité

## Exercice 1

Soit  $M$  une machine de Turing donnée (par exemple une machine qui accepte tous les mots se terminant par la lettre  $a$ ).

- Représenter graphiquement la machine  $M_e$  qui efface le mot écrit sur son ruban, repositionne la tête de lecture au début du ruban puis se comporte exactement comme  $M$ .
- Soit  $w$  un mot donné (par exemple  $abba$ ). Représenter graphiquement la machine  $M_w$  qui écrit  $w$  sur le ruban (en effaçant *tout* mot qui s'y trouverait), repositionne la tête de lecture au début du ruban puis se comporte exactement comme  $M$ .

## Exercice 2

Montrer que déterminer si une MT s'arrête sur le mot vide est indécidable (problème de l'arrêt sur le mot vide). Indication : par réduction à  $H$ , l'ensemble des couples  $(M,w)$  tels que  $M$  s'arrête sur  $w$ .

## Exercice 3

Montrer que déterminer si une MT s'arrête pour au moins un mot d'entrée est indécidable (problème de l'arrêt existentiel). Indication : par réduction au problème de l'arrêt sur le mot vide.

## Exercice 4

Montrer que déterminer si une MT s'arrête pour tout mot d'entrée est indécidable (problème de l'arrêt universel). Indication : par réduction au problème de l'arrêt sur le mot vide.

## Exercice 5

1. On a vu en cours que  $LU$ , l'ensemble des couples  $(M,w)$  tels que  $M$  accepte  $w$ , est indécidable. Montrer cependant que  $LU$  est récursivement énumérable.
2. Que peut-on en déduire concernant le complément de  $LU$ , i.e., l'ensemble des couples  $(M,w)$  tels que  $M$  n'accepte pas  $w$  ?
3. Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux MT qui terminent toujours. Soient  $f_1$  et  $f_2$  les deux fonctions calculées par ces machines. Montrer qu'il est impossible de déterminer algorithmiquement si  $f_1=f_2$ . Indication : par réduction au complément de  $LU$ .

## Exercice 6

Montrer que déterminer si pour tout couple de machines de Turing  $M_1$  et  $M_2$ , il existe un mot  $w$  tel que  $M_1$  et  $M_2$  s'arrêtent sur  $w$  est indécidable. Indication : par réduction au problème de l'arrêt sur le mot vide.