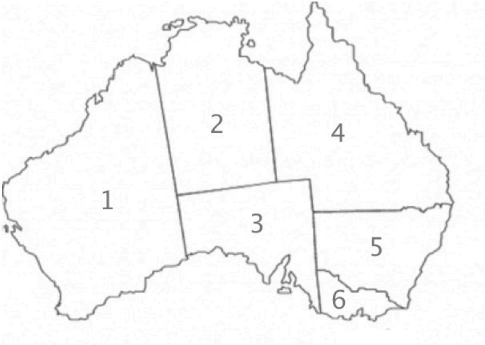
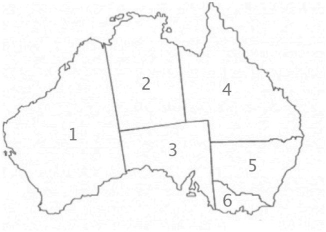
157 Coloriage de Cartes



- colorier chaque région de telle sorte que deux régions ayant une frontière commune n'aient jamais la même couleur
- but : minimiser le nombre de couleurs

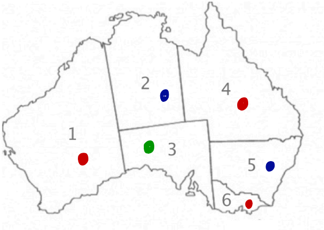
158 Coloriage de Cartes - Modélisation



Questions

- combien faut-il de couleur minimum pour la carte du dessus ?

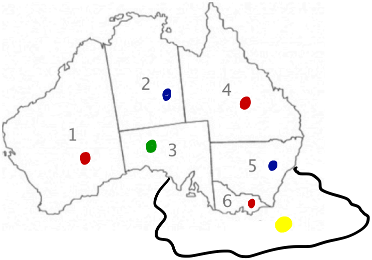
158 Coloriage de Cartes - Modélisation



Questions

- combien faut-il de couleur minimum pour la carte du dessus ? 3 couleurs

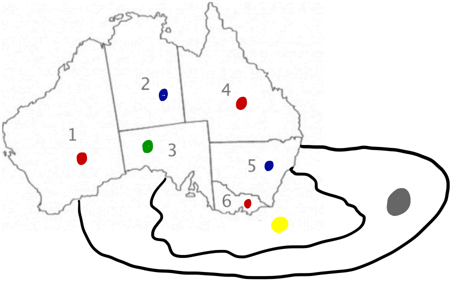
158 Coloriage de Cartes - Modélisation



Questions

- combien faut-il de couleur minimum pour la carte du dessus ? 3 couleurs
- pourriez-vous donner une carte où il faut au moins 4 couleurs ?

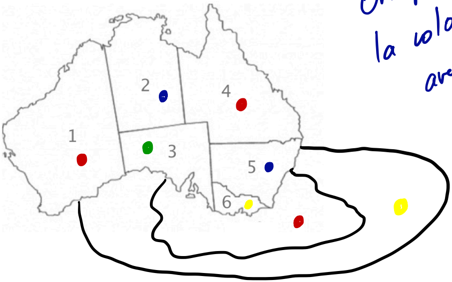
158 Coloriage de Cartes - Modélisation



Questions

- combien faut-il de couleur minimum pour la carte du dessus ? 3 couleurs
- pourriez-vous donner une carte où il faut au moins 4 couleurs ?
- et 5 couleurs ?

158 Coloriage de Cartes - Modélisation

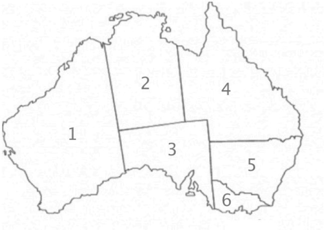


On peut la colorier avec 4 couleurs

Questions

- combien faut-il de couleur minimum pour la carte du dessus ? 3 couleurs
- pourriez-vous donner une carte où il faut au moins 4 couleurs ?
- et 5 couleurs ?

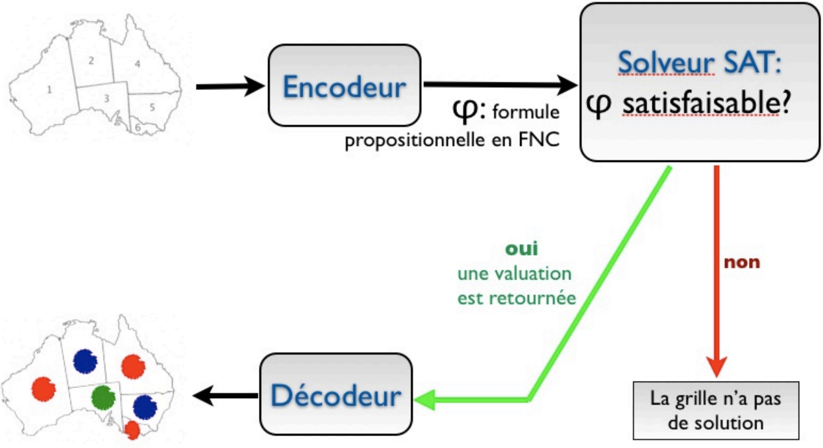
158 Coloriage de Cartes - Modélisation



Questions

- combien faut-il de couleur minimum pour la carte du dessus ? 3 couleurs
- pourriez-vous donner une carte où il faut au moins 4 couleurs ?
- et 5 couleurs ?
- **Remarque :** lorsque les régions ne sont pas discontinues (i.e. qu'une région est nécessairement en un seul morceau), alors 4 couleurs suffisent toujours (*Théorème de 4 couleurs*)

Modélisation : Rappel



1. Il faut introduire les symboles de proposition de telle sorte que les valeurs de vérité affectées à ces propositions par le solveur nous permettent de retrouver facilement un coloriage.

Ici, un symbole par région et par couleur.

Couleurs = $\{R, V, B\}$

Régions = $\{1, 2, \dots, 6\}$

Propositions : $\{x_{r,c} \mid r \in \text{Régions}, \ c \in \text{Couleurs}\}$

1. Chaque région doit être coloriée (par au moins une couleur)

Pour la région 1 : $x_{1,R} \vee x_{1,V} \vee x_{1,B}$

Pour toutes les régions : $\bigwedge_{i=1}^{6} (x_{i,R} \vee x_{i,V} \vee x_{i,B})$

2. Chaque région doit être coloriée par au plus une couleur

Pour la région 1 :

$$(x_{1,R} \rightarrow \neg x_{1,V} \wedge \neg x_{1,B}) \wedge$$
$$(x_{1,V} \rightarrow \neg x_{1,R} \wedge \neg x_{1,B}) \wedge$$
$$(x_{1,B} \rightarrow \neg x_{1,R} \wedge \neg x_{1,V})$$

Equivalent à : $\neg x_{1,R} \vee (\neg x_{1,V} \wedge \neg x_{1,B}) \equiv (\neg x_{1,R} \vee \neg x_{1,V}) \wedge (\neg x_{1,R} \vee \neg x_{1,B})$

Pour toutes les régions et tous les couples de couleurs, on obtient :

$$\bigwedge_{r \in \text{Régions}} \bigwedge_{\substack{c, c' \in \text{Couleurs} \\ c \neq c'}} (\neg x_{r,c} \vee \neg x_{r,c'})$$

3. Les contraintes de voisinage :

On note "Voisines" l'ensemble des paires de régions voisines.

Pour les régions 1 et 2 :

$$\begin{aligned} &(x_{1,R} \rightarrow (x_{2,V} \vee x_{2,B})) \\ \wedge\ &(x_{1,V} \rightarrow (x_{2,R} \vee x_{2,B})) \\ \wedge\ &(x_{1,B} \rightarrow (x_{2,R} \vee x_{2,V})) \end{aligned}$$

Pour toutes les paires de régions voisines :

$$\bigwedge_{(r_1,r_2)\in \text{Voisines}} \ \bigwedge_{c_1\in \text{Couleurs}} \left(x_{r_1,c_1} \rightarrow \bigvee_{\substack{c_2\in \text{Couleurs} \\ c_2\neq c_1}} x_{r_2,c_2} \right)$$

$$\equiv \bigwedge_{(r_1,r_2)\in \text{Voisines}} \ \bigwedge_{c_1\in \text{Couleurs}} \left(\neg x_{r_1,c_1} \vee \bigvee_{\substack{c_2\in \text{Couleurs} \\ c_2\neq c_1}} x_{r_2,c_2} \right)$$

Autres solutions :

$$\bigwedge_{(r_1,r_2)\in \text{Voisines}} \ \bigwedge_{c\in \text{Couleurs}} \left(\neg x_{r_1,c} \vee \neg x_{r_2,c} \right)$$

Coloriage de Cartes - Modélisation

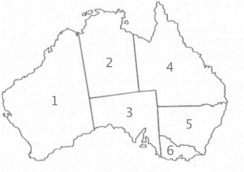
Choix des Propositions

- fixons un nombre de couleurs (3) et exprimons l'existence d'un coloriage avec 3 couleurs en logique propositionnelle.
- la première étape consiste à définir l'ensemble des propositions et leur sémantique
- ici, l'ensemble des régions est $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des couleurs est $\{R, V, B\}$. Pour chaque région r et chaque couleur c, nous introduisons la proposition $x_{r,c}$. Soit

$$X = \{x_{r,c} \mid r \in \{1, \dots, 6\},\ c \in \{R, V, B\}\}$$

- Nous posons la sémantique suivante : si l'interprétation V trouvée par le solveur SAT est telle que $V(x_{r,c}) = 1$, alors cela signifie que la région r est coloriée avec la couleur c

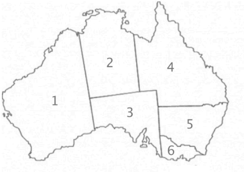
Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- les régions voisines doivent avoir des couleurs différentes, ici les régions voisines sont données par l'ensemble des paires $\mathit{Voisines} = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5),(3,5),(5,6),(3,6)\}$.

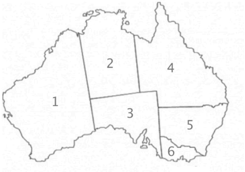
Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- les régions voisines doivent avoir des couleurs différentes, ici les régions voisines sont données par l'ensemble des paires $\mathit{Voisines} = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5),(3,5),(5,6),(3,6)\}$.
- comment exprimer que 1 et 2 ont des couleurs différentes ?

Coloriage de Cartes - Modélisation

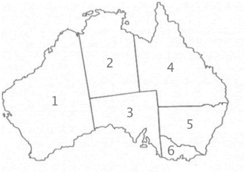


Expression des contraintes

- Il faut exprimer la contrainte pour toutes les paires voisines de $Voisines = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5),(3,5),(5,6),(3,6)\}$:

$$
\begin{array}{rl}
& (\neg x_{1,V} \vee \neg x_{2,V}) \wedge (\neg x_{1,B} \vee \neg x_{2,B}) \wedge (\neg x_{1,R} \vee \neg x_{2,R}) \\
\wedge & (\neg x_{1,V} \vee \neg x_{3,V}) \wedge (\neg x_{1,B} \vee \neg x_{3,B}) \wedge (\neg x_{1,R} \vee \neg x_{3,R}) \\
\wedge & (\neg x_{2,V} \vee \neg x_{4,V}) \wedge (\neg x_{2,B} \vee \neg x_{4,B}) \wedge (\neg x_{2,R} \vee \neg x_{4,R}) \\
\wedge & (\neg x_{3,V} \vee \neg x_{4,V}) \wedge (\neg x_{3,B} \vee \neg x_{4,B}) \wedge (\neg x_{3,R} \vee \neg x_{4,R}) \\
\wedge & (\neg x_{4,V} \vee \neg x_{5,V}) \wedge (\neg x_{4,B} \vee \neg x_{5,B}) \wedge (\neg x_{4,R} \vee \neg x_{5,R}) \\
\wedge & (\neg x_{3,V} \vee \neg x_{5,V}) \wedge (\neg x_{3,B} \vee \neg x_{5,B}) \wedge (\neg x_{3,R} \vee \neg x_{5,R}) \\
\wedge & (\neg x_{5,V} \vee \neg x_{6,V}) \wedge (\neg x_{5,B} \vee \neg x_{6,B}) \wedge (\neg x_{5,R} \vee \neg x_{6,R}) \\
\wedge & (\neg x_{3,V} \vee \neg x_{6,V}) \wedge (\neg x_{3,B} \vee \neg x_{6,B}) \wedge (\neg x_{3,R} \vee \neg x_{6,R})
\end{array}
$$

Coloriage de Cartes - Modélisation

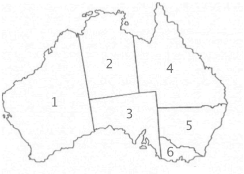


Expression des contraintes

- Il faut exprimer la contrainte pour toutes les paires voisines de $Voisines = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5),(3,5),(5,6),(3,6)\}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{1,c} \vee \neg x_{2,c}) \\
\wedge & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{1,c} \vee \neg x_{3,c}) \\
\wedge & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{2,c} \vee \neg x_{4,c}) \\
\wedge & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{3,c} \vee \neg x_{4,c}) \\
\wedge & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{4,c} \vee \neg x_{5,c}) \\
\wedge & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{3,c} \vee \neg x_{5,c}) \\
\wedge & (\bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{5,c} \vee \neg x_{6,c})
\end{array}
$$

Coloriage de Cartes - Modélisation



Expression des contraintes

- Il faut exprimer la contrainte pour toutes les paires voisines de $Voisines = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,4),(4,5),(3,5),(5,6),(3,6)\}$:

$$\phi = \bigwedge_{(i,j)\in Voisines} \bigwedge_{c\in\{R,V,B\}} \neg x_{i,c} \vee \neg x_{j,c}$$

- codons le problème dans MiniSAT

Coloriage de Cartes - Sortie de MiniSAT

```
efiliot@plabuntu:/mnt/hgfs/Partage-Ubuntu/Coloriage$ ./coloriage
=================================[MINISAT]===============
| Conflicts |     ORIGINAL     |            LEARNT           | Progress |
|           | Clauses Literals |  Limit Clauses Literals Lit/Cl |          |
==========================================================
|        0 |     27     60 |     9     0      0   -nan |  0.000 % |
==========================================================
La formule est satisfaisable
 La region 1 est colorie avec la couleur 1
 La region 2 est colorie avec la couleur 2
 La region 3 est colorie avec la couleur 3
 La region 4 est colorie avec la couleur 1
 La region 5 est colorie avec la couleur 2
 La region 6 est colorie avec la couleur 1
```