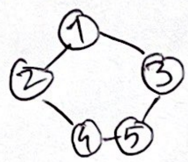
Vertex Cover | VC

Données : - un graphe $G = (V, E)$
- un entier naturel j tq $j \leq |V|$

Question : existe-t-il $V' \subseteq V$ avec $|V'| \leq j$ tq pr $\forall (u,v) \in E$, soit $u \in V'$ soit $v \in V'$?

Exemples :

G :



Données - G
- $j = 3$

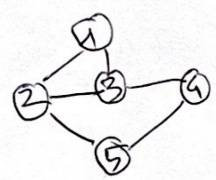
oui, **certificat** $V' = \{1, 4, 5\}$

Données - G
- $j = 2$

non

Exercices :

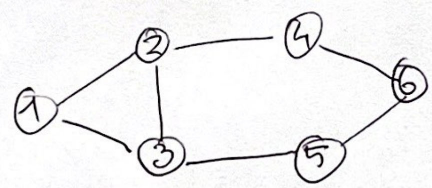
G :



Données - G
- $j = 3$

Données - G
- $j = 2$

G :



Données - G
- $j = 1$

Données - G
- $j = 2$

Données - G
- $j = 3$

Données - G
- $j = 4$

thm : VC $\in$ NPC.

Dém :

- VC $\in$ NP :
  la validation d'un certificat est polynomiale % taille de l'instance.
- VC NP-difficile :
  3SAT $\propto$ VC (cf cours)

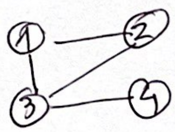
Clique

<u>Données</u> : – un graphe $G = (V, E)$
– un entier naturel j avec $j \leq |V|$

<u>Question</u> : existe-t-il $V' \subseteq V$ avec $|V'| \geq j$ tq
il existe un arc $\in E$ entre $\forall$e paire de sommets $\neq$ de V' ?

<u>Exemples</u>

G :



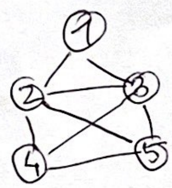
[<u>Données</u> : – G
– $j=2$ oui $\{1,2\}$

[<u>Données</u> : – G
– $j=3$ oui $\{1,2,3\}$

[<u>Données</u> : – G
– $j=4$ non

<u>Exercice</u>

G :



[<u>Données</u> : – G
– $j=2$

[<u>Données</u> : – G
– $j=3$

[<u>Données</u> : – G
– $j=4$

[<u>Données</u> : – G
– $j=5$

<u>thm</u> Clique $\in$ NPC

<u>Dem</u>

– Clique $\in$ NP :
la validation d'un certificat est polynomiale
$\propto$ taille de l'instance.

– Clique NP-difficile :
VC $\propto$ Clique (cf exo)

Graphe complémentaire

Défn : Soit $G=(V,E)$ un graphe.

$G^c = (V, E^c)$ avec $E^c = \{(u,v) \mid (u,v)\in E^2 \text{ et } u \neq v \text{ et } (u,v) \notin E\}$

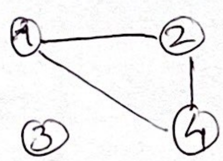
est le graphe complémentaire de G.

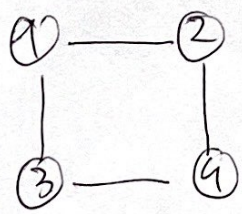
Autrement dit :

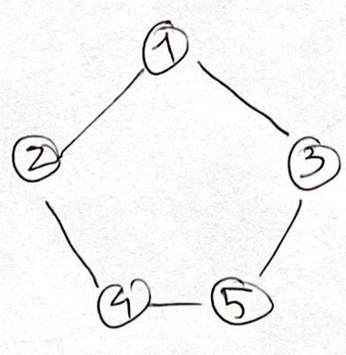
- G^c a les mêmes sommets que G ;
- G^c contient des arcs exactement là où G n'en a pas.

Exemples et exercices :

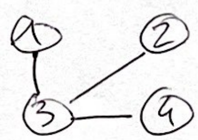
G :

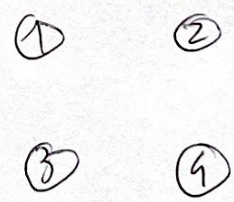


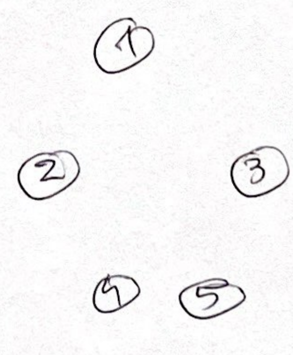




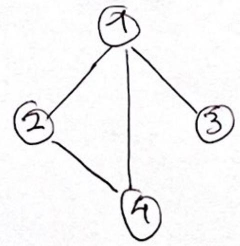
G^c

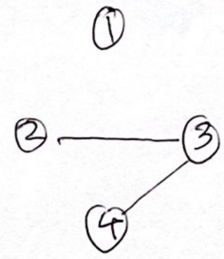






Un lien entre VC et Clique

$G =$ 

$G^c =$ 

		taille			taille
couverture de sommets de G	$V' = \{1,4\}$	2	Clique de G^c	$V - V' = \{2,3\}$	2
	$\{1,2\}$	2		$\{3,4\}$	2
	$\{1,2,4\}$	3		$\{3\}$	1
	$\{1,2,3,4\}$	1		$\emptyset$	0

<u>Prop</u> : [V' est une couverture de sommets de G] $\Leftrightarrow$ [$V - V'$ est une clique de G^c]

Exercice : à démontrer

Transformation α de VC vers Clique :

$$\begin{bmatrix} - G = (V, E) \\ - j \in \mathbb{N} \leq |V| \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} - G^c = (V, E^c) \\ - j' = |V| - j \end{bmatrix}$$

Propriétés :

1) α polynomiale % taille de l'instance

2) α préserve la polarité des instances :