EXERCICES

I - Calcul propositionnel

1. Pour chacune des formules suivantes, dire si c'est une **tautologie** ou une **antilogie**.
   Sinon, dire pour quelles valeurs des variables propositionnelles la formule est vraie.
   $p \vee q$
   $p \rightarrow q$
   $p \vee \neg p$
   $p \rightarrow p$
   $p \wedge \neg p$
   $p \wedge (p \rightarrow q) \wedge \neg q$
   $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$
   $(p \vee r) \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow p \vee q$

2. $F \equiv G$ signifie que les formules F et G sont **équivalentes.**
   Est-ce qu'on a
   $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$?
   $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$?
   $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$?
   $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$?
   $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$?
   $p \rightarrow q \equiv \neg p \rightarrow \neg q$?
   $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$?
   $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$?

3. $\Sigma \models F$ signifie que la formule F est **conséquence sémantique** (ou logique) de l'ensemble de formules Σ
   Montrer que
   $\{p,\ p \rightarrow q\} \models q$
   $\{p \vee r,\ q \vee \neg r\} \models p \vee q$
   $\models p \rightarrow q$ si et seulement si $\{p\} \models q$

4. Mettre les formules suivantes sous **forme normale conjonctive (FNC)** et sous **forme normale disjonctive (FND)**
   $p \wedge (q \vee (r \wedge s))$
   $p \leftrightarrow q$
   $p \wedge q$
   $p \vee q$
   $p \wedge q \rightarrow r \wedge s$
   $p \vee q \rightarrow r \vee s$
   $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow r$
   $p \wedge ((p \rightarrow q) \rightarrow r)$

II - Calcul des Prédicats du premier ordre

1. Pour chacune des formules suivantes, dire si elle est **valide** (toujours vraie)
   $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge A(a) \rightarrow B(a)$ [a est une constante]
   $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \ \wedge \forall x(B(x) \rightarrow C(x)) \rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$
   $\forall x A(x) \rightarrow \exists x A(x)$
   $\exists x A(x) \rightarrow \forall x A(x)$
   $A(a) \rightarrow \exists x A(x)$
   $\exists x A(x) \rightarrow A(a)$
   $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$
   $\exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$

2. Les formules suivantes sont-elles **équivalentes** ?
   $\neg \forall x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$?
   $\neg \forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$?
   $\neg \forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \equiv \exists x(A(x) \wedge \neg B(x))$?
   $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$?
   $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$?
   $\forall x(A(x) \vee B(x)) \equiv \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$?
   $\exists x(A(x) \vee B(x)) \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$?
   $H \rightarrow \forall x A(x) \equiv \forall x(H \rightarrow A(x))$?
   $H \rightarrow \exists x A(x) \equiv \exists x(H \rightarrow A(x))$?
   $\forall x A(x) \rightarrow C \equiv \forall x(A(x) \rightarrow C)$?
   $\exists x A(x) \rightarrow C \equiv \exists(A(x) \rightarrow C)$?
   $\forall x A(x) \rightarrow C \equiv \exists x(A(x) \rightarrow C)$?
   $\exists x A(x) \rightarrow C \equiv \forall x(A(x) \rightarrow C)$?
   $\forall x \exists y P(x,y) \equiv \exists y \forall x P(x,y)$?
   $\forall x \exists y(A(x) \wedge B(y)) \equiv \exists y \forall x(A(x) \wedge B(y))$?

3. Est-ce qu'on a les **conséquences sémantiques** suivantes ?
   $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)),\ A(a)\} \models B(a)$?
   $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)), \forall x(B(x) \rightarrow C(x))\} \models \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$?
   $\{\forall x(A(x) \rightarrow B(x)),\ \forall x(B(x) \rightarrow C(x))\} \models \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$?
   $\{\forall x \exists y P(x,y),\ \forall x \forall y \exists z(P(x,z) \wedge P(z,y)) \rightarrow Q(x,y)\} \models \forall x \exists z Q(x,y)$?

4. Soit I l'interprétation de domaine $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, où R est interprété par $\leq$, $\geq$, $<$ ou $>$.
   Quelle est l'**interprétation des formules** $\forall x \exists y R(x,y)$ et $\exists x \forall y R(x,y)$?

III - Application - Calcul des Prédicats

1. Formaliser les connaissances suivantes dans le calcul des prédicats

   Un dragon est heureux si tous ses enfants peuvent voler.
   Les dragons verts peuvent voler.
   Un dragon est vert si au moins un de ses parents est vert.

2. En déduire que les dragons verts sont heureux.
   Trouver une réfutation de cette propriété en utilisant le Principe de résolution.

3. Que peut faire un dragon rose pour être heureux ?

IV - Démonstration automatique de théorèmes

On a en théorie des groupes le théorème suivant :
Théorème : Si, pour tout élément d'un groupe, le carré de cet élément est égal à l'élément neutre,

alors le groupe est commutatif.

On rappelle les axiomes de groupe :
Un groupe est un ensemble muni d'un opération associative, ayant un élément neutre, et tel que tout élément à un inverse.

C'est-à-dire, si l'on note * l'opération :
- pour tous x, y, z, on a $x * (y * z) = (x * y) * z$
- e l'élément neutre est tel que pour tout x, $e * x = x * e = x$
- pour tout x il existe un inverse y tel que $x * y = y * x = e$

1. Démontrer le théorème ci-desssus par un raisonnement mathématique habituel.
2. En utilisant le prédicat P qui sera défini comme
   $P(x, y, z) \leftrightarrow z = x * y$
   trouver une réfutation utilisant le principe de résolution.
3. En utilisant le symbole fonctionnel f qui sera défini comme
   $f(x, y) = x * y$
   trouver une réfutation utilisant le principe de résolution avec démodulation et/ou paramodulation.